

Prácticas Tema 6. Modelos de ecuaciones simultáneas

Ana J. López y Rigoberto Pérez

Dpto. Economía Aplicada, Universidad de Oviedo

PRÁCTICA 6.1- La oferta agregada de determinado producto agrícola (QS) viene explicada por su precio (P) y la temperatura media (T), mientras la demanda agregada (QD) depende del precio (P), la población (N) y la Renta (R).

$$\begin{cases} Q_t^o = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 T_t + u_t^o \\ Q_t^d = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 N_t + \beta_4 R_t + u_t^d \end{cases}$$

- a) ¿Sería aconsejable estimar la ecuación de oferta individualmente mediante mínimos cuadrados ordinarios? ¿Por qué?
- b) Analizar la identificabilidad del sistema propuesto.
- c) Describir cómo se podría estimar el modelo a partir de la conclusión del apartado anterior.

SOLUCIÓN:

- a) ¿Sería aconsejable estimar la ecuación de oferta individualmente mediante mínimos cuadrados ordinarios? ¿Por qué?

La estimación individual de la ecuación de oferta no sería aconsejable ya que se está ignorando el hecho de que existe simultaneidad en la determinación de precios y cantidades. De hecho entre las variables explicativas de la oferta aparece el precio que es endógena y por tanto está correlacionada con las perturbaciones.

- b) Analizar la identificabilidad del sistema propuesto.

El modelo tiene dos variables endógenas (Q y P) y tres predeterminadas (T, N y R), por tanto $m=2$, $k=3$ y al analizar la condición de orden: $k - k' \geq m' - 1$ para las dos ecuaciones se observa:

- ▷ Ecuación 1: $k - k' = 3 - 1 > 2 - 1$ Sobreidentificada
- ▷ Ecuación 2: $k - k' = 3 - 2 = 2 - 1$ Identificada

La condición suficiente de rango se cumple en ambas ecuaciones, como puede observarse a través de la matriz **A** de coeficientes:

▷ Ecuación 1: $\mathbf{A} = (-\beta_3, -\beta_4)$ $\rho(A) = 1 = m - 1$ Sobreidentificada

▷ Ecuación 2: $\mathbf{A} = (-\alpha_3)$ $\rho(A) = 2 - 1$ Identificada

c) Describir cómo se podría estimar el modelo a partir de la conclusión del apartado anterior.

A partir de los apartados anteriores se concluye que el modelo podría ser estimado por mínimos cuadrados en dos etapas. Más concretamente, en la primera etapa se estimarían los precios (variable endógena que interviene como explicativa) a partir de las variables instrumentales (predeterminadas) que son T, N y R.

En una segunda etapa se sustituiría el precio estimado $\hat{P}_t$ en las ecuaciones y se lleva a cabo su estimación.

PRACTICA 6.2- Se ha propuesto el siguiente modelo de ecuaciones simultáneas para explicar el equilibrio entre oferta y demanda:

$$\begin{cases} Q_t^o = \beta_{10} + \beta_{11}P_t + u_{1t} \\ Q_t^d = \beta_{20} + \beta_{21}P_t + \beta_{22}W_t + u_{2t} \end{cases}$$

donde Q, P y W recogen respectivamente cantidades, precios y salarios.

Estudiar la identificabilidad del modelo y su estimación a partir de la siguiente información muestral:

Q_t	P_t	W_t
20	10	10
30	20	15
45	15	5
15	25	5
15	40	15
30	20	15
15	25	5
45	15	5
15	40	15
20	10	10

SOLUCIÓN:

En el modelo se observa que $m=2$ (variables endógenas Q y P) y $k=1$ (variable predeterminada W).

Estudiando la condición de orden $k - k' \geq m' - 1$ para las dos ecuaciones se observa:

▷ Ecuación 1: $k - k' = 2 - 1 = 2 - 1$ Identificada si se cumple la condición de rango

▷ Ecuación 2: $k - k' = 0 < 1$ No identificada

Analizando ahora la condición de rango en la primera ecuación se tiene la matriz $\mathbf{A} = (-\beta_{22})$ con rango unitario y por tanto la primera ecuación es identificada.

Por lo que se refiere a la estimación, el modelo podría ser expresado en forma reducida como:

$$\begin{cases} P_t = \pi_{10} + \pi_{11}W_t + v_{1t} \\ Q_t = \pi_{20} + \pi_{21}W_t + v_{2t} \end{cases}$$

donde los parámetros reducidos serían

$$\pi_{10} = \frac{\beta_{20} - \beta_{10}}{\beta_{11} - \beta_{21}} \quad \pi_{11} = \frac{\beta_{22}}{\beta_{11} - \beta_{21}} \quad \pi_{20} = \beta_{10} + \beta_{11}\pi_{10} \quad \pi_{21} = \beta_{11}\pi_{11}$$

Como hemos comentado, la primera ecuación se encuentra identificada y en consecuencia es posible recuperar sus parámetros estructurales a partir de los reducidos:

$$\beta_{11} = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}} \quad \beta_{10} = \pi_{20} - \beta_{11}\pi_{10}$$

Así pues, si estimamos por MCO las ecuaciones reducidas se obtendría:

$$\begin{cases} \hat{P}_t = 12 + W_t \\ \hat{Q}_t = 32,5 - 0,75W_t \end{cases}$$

y a partir de ahí se llegaría a los estimadores de Mínimos Cuadrados Indirectos (MCI) para los parámetros estructurales de la primera ecuación:

$$\hat{\beta}_{11} = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{11}} = -0,75 \quad \hat{\beta}_{10} = \hat{\pi}_{20} - \hat{\beta}_{11}\hat{\pi}_{10} = 41,5$$

llegándose así al modelo de demanda estimada:

$$\hat{Q}_t = 41,5 - 0,75P_t$$

Puede comprobarse que esta solución coincide con la que se obtendría por el procedimiento de mínimos cuadrados bietápicos (MC2E). En este caso se estima, en una primera etapa, el precio en función de la variable instrumental salarios W , con lo cual se obtendría:

$$\hat{P}_t = 10 + W_t$$

y por tanto se calcularían los precios estimados de la tabla:

Q_t	P_t	W_t	$\hat{P}_t$
20	10	10	22
30	20	15	27
45	15	5	17
15	25	5	17
15	40	15	27
30	20	15	27
15	25	5	17
45	15	5	17
15	40	15	27
20	10	10	22

A continuación en la segunda etapa se estima la cantidad demandada en función del precio estimado en la etapa anterior, llegándose así al resultado $\hat{Q}_t = 41,5 - 0,75\hat{P}_t$.

Cabe señalar que en cambio la segunda ecuación no está identificada por lo que no es posible llevar a cabo su estimación.

PRACTICA 6.3- Se ha propuesto un modelo regional para la determinación simultánea del nivel salarial (W , en miles de euros) y el empleo (N , en miles de trabajadores):

$$\begin{cases} W_i = \alpha_1 + \alpha_2 N_i + \alpha_3 P_i + u_{1i} \\ N_i = \beta_1 + \beta_2 W_i + u_{2i} \end{cases}$$

- a) Expresar el modelo en forma reducida y analizar su identificabilidad.
- b) La información disponible para 17 regiones ha proporcionado la siguiente estimación:

$$\hat{N}_i = 450,61 - 0,232 W_i$$

(183,5) (0,068)

Analizar la significación de este modelo.

SOLUCIÓN:

- a) Expresar el modelo en forma reducida y analizar su identificabilidad.
- La forma reducida del modelo viene dada por la expresión siguiente

$$\begin{cases} W_i = \pi_{11} + \pi_{12} P_i + v_{1i} \\ N_i = \pi_{21} + \pi_{22} P_i + v_{2i} \end{cases}$$

donde los parámetros de la forma reducida se obtienen mediante las expresiones:

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1}{1 - \alpha_2 \beta_2} \quad \pi_{12} = \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_2 \beta_2}$$

$$\pi_{21} = \beta_1 + \beta_2 \pi_{11} \quad \pi_{22} = \beta_2 \pi_{12}$$

donde podemos observar que existen 4 parámetros reducidos y 5 parámetros estructurales, por lo que el modelo no está identificado.

En cualquier caso, si analizamos su identificabilidad a partir de las condiciones de orden y de rango se observa que la primera ecuación no está identificada y la segunda sí lo está.

Así, la condición de orden: $k - k' \geq m' - 1$ para las dos ecuaciones proporciona:

▷ Ecuación 1: $k - k' = 1 - 1 < 2 - 1$ No identificada

▷ Ecuación 2: $k - k' = 1 - 0 = 2 - 1$ Identificada

- b) La información disponible para 17 regiones ha proporcionado la siguiente estimación:

$$\hat{N}_i = 450,61 - 0,232 W_i$$

$(183,5) \quad (0,068)$

Analizar la significación de este modelo.

El contraste de la hipótesis $H_0 : \beta_2 = 0$ se lleva a cabo mediante la discrepancia t de Student $\frac{\hat{\beta}_2}{S_{\hat{\beta}_2}}$ cuyo valor muestral es en este caso $\frac{-0,232}{0,068} = -3,41$ que lleva asociado el nivel crítico: $p = P(|t_{15}| > 3,41) \approx 0$ y por tanto conduce al rechazo del supuesto de nulidad para el coeficiente de la variable nivel salarial.
