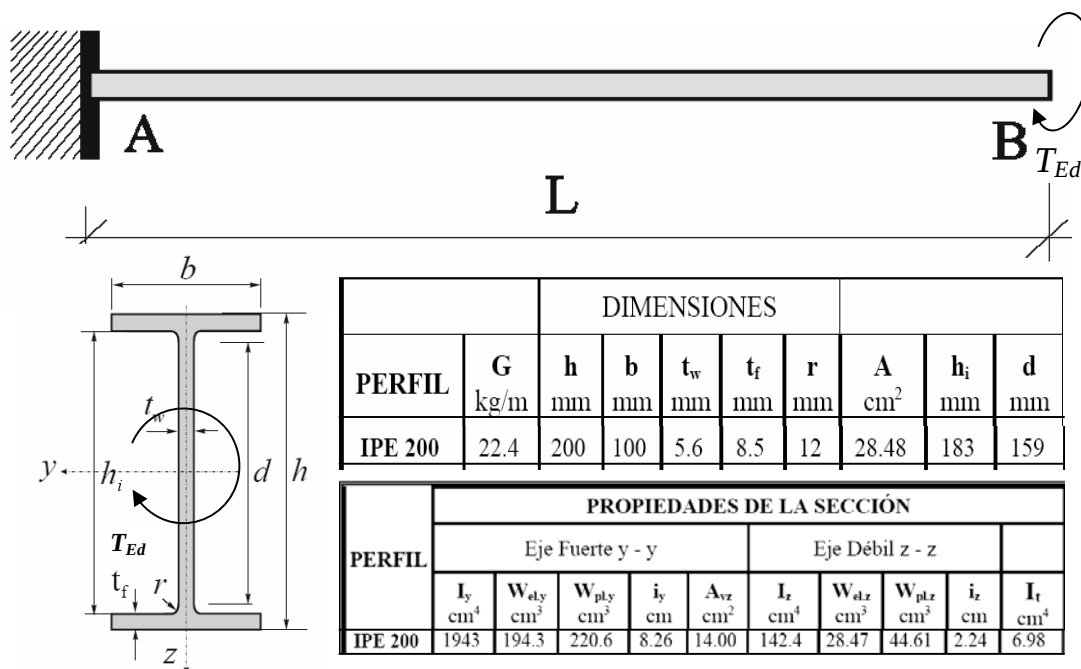


PROBLEMA N°1

Analizar la pieza en ménsula de 1,5m de longitud, con sección transversal IPE200 en acero S275 sabiendo que se encuentra solicitada por un momento torsor $T_{Ed}=1kNm$ aplicado en su extremo libre tal y como se indica en la figura. En la figura se proporcionan asimismo las dimensiones y características mecánicas del IPE200.

**SOLUCIÓN**

Dado el tipo de sección transversal y las condiciones de vinculación de la pieza, ésta se encuentra sometida a una torsión mixta, siendo constante en toda la pieza y de magnitud $T_{Ed}=1kNm$ el momento torsor aplicado. Este momento torsor se distribuirá en sus componentes de torsión uniforme y torsión de alabeo siguiendo el método de Timoshenko. El momento torsor de cálculo T_{Ed} se descompone en suma de la componente de torsión uniforme $T_{t,Ed}$ que solo genera tensiones tangenciales y de la torsión de alabeo $T_{w,Ed}$.

$$T_{Ed} = T_{t,Ed} + T_{w,Ed}$$

Para obtener la fracción que se lleva cada parte se igualan el giro a torsión uniforme y el giro a torsión de alabeo a partir del momento torsor T_{Ed} . De dicha igualdad se obtiene el valor de α que permite descomponer la torsión mixta de modo que:

$$T_{t,Ed} = \alpha \cdot T_{Ed} \quad T_{w,Ed} = (1-\alpha) \cdot T_{Ed}$$

$$\alpha = \frac{\varphi_{\max.2}}{\varphi_{\max.1} + \varphi_{\max.2}} \begin{cases} \varphi_{\max.1} = \frac{1}{G \cdot I_T} \int_A^B T_{Ed} \cdot d_x \\ \varphi_{\max.2} = \frac{2 \cdot f_{\max}}{d}; \quad f_{\max} = f(F = \frac{T_{Ed}}{d}) \end{cases}$$

A, B secciones de la pieza entre las que el giro relativo es máximo

$f_{\max}$ flecha máxima de un ala sometida a la fuerza horizontal F

El giro a torsión uniforme θ_{AB} por unidad de longitud valdrá

$$\theta_{AB} = \frac{1}{G \cdot I_T} \int_A^B T_{Ed} \cdot d_x = \frac{T_{Ed}}{G \cdot I_T} = \frac{10^6 \text{ Nmm}}{80000 \text{ N/mm}^2 \cdot 6,98 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 1,79 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1}$$

De modo que el giro φ_1 vale

$$\varphi_1 = 1,79 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-1} \cdot 1500 \text{ mm} = 0,268$$

A continuación se va a determinar el giro debido a la torsión de alabeo φ_2 en función de la flecha máxima $f_{\max}$ que provocaría una carga puntual F aplicada en el extremo libre de una pieza de sección rectangular (ala de la viga IPE200) con dimensiones $b=100\text{mm}$, $t_f=8,5\text{mm}$. La carga F se obtiene como cada una de las componentes del par de fuerzas aplicada en cada ala de la viga que equilibra el momento torsor T_{Ed} . De modo que:

$$\varphi_{\max.2} = \frac{2 \cdot f_{\max}}{d} \quad F = \frac{T_{Ed}}{d} = \frac{10^6 \text{ Nmm}}{(h - t_f)} = \frac{10^6 \text{ Nmm}}{(200 \text{ mm} - 8,5 \text{ mm})} = 5222 \text{ N}$$

la flecha máxima $f_{\max}$ debida a la carga puntual $F=5222\text{N}$ sobre el extremo libre de una ménsula de longitud $L=1500\text{mm}$ es:

$$f_{\max} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_{fz}} \begin{cases} I_{fz} = \frac{8,5 \text{ mm} \cdot (100 \text{ mm})^3}{12} = 70,810^4 \text{ mm}^4 \\ E = 210000 \text{ N/mm}^2 \end{cases} \rightarrow f_{\max} = \frac{5222 \text{ N} \cdot (1500 \text{ mm})^3}{3 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 70,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 39,5 \text{ mm}$$

por lo que el giro debido a la torsión de alabeo φ_2

$$\varphi_{\max.2} = \frac{2 \cdot f_{\max}}{d} = \frac{2 \cdot 39,5 \text{ mm}}{191,5 \text{ mm}} = 0,41$$

Así, el coeficiente α para descomponer la torsión mixta será:

$$\alpha = \frac{\varphi_{\max.2}}{\varphi_{\max.1} + \varphi_{\max.2}} = \frac{0,41}{0,268 + 0,41} = 0,6$$

y los esfuerzos correspondientes de torsión uniforme y torsión de alabeo valdrán:

$$T_{t,Ed} = \alpha \cdot T_{Ed} = 0,6 \cdot 1 \text{ kNm} = 0,6 \text{ kNm}$$

$$T_{w,Ed} = (1-\alpha) \cdot T_{Ed} = 0,4 \cdot 1 \text{ kNm} = 0,4 \text{ kNm} \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{T_{w,Ed}}{d} = \frac{0,4 \text{ kN} \cdot \text{m}}{191,5 \text{ mm}} = 2088,7 \text{ N}$$

El momento flector máximo M_f en el extremo empotrado de un ala sometida a F_1 vale:

$$M_f = F_1 \cdot L = 2088,7 \text{ N} \cdot 1500 \text{ mm} = 3,13 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

A partir de estos esfuerzos se obtendrán las tensiones en los puntos A (centro del ala) y B (borde libre del ala) de la sección transversal tal como se indica en la figura.

	Debidas a la torsión ($T_{t,Ed}=0,6\text{kNm}$)	Debidas a la flexión (F_1, M_f)
Punto A	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = \frac{T_{t,Ed} \cdot t_f}{I_T} = \frac{0,6 \cdot 10^6 \cdot 8,5}{6,98 \cdot 10^4} = 73 \text{ Mpa}$ $\tau_{zx} = 0$	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = \frac{3}{2} \frac{F_1}{b \cdot t_f} = \frac{3}{2} \frac{2088,7}{100 \cdot 8,5} = 3,7 \text{ Mpa}$ $\tau_{zx} = 0$
Punto B	$\sigma_x = 0$ $\tau_{yx} = 0$ $\tau_{zx} = \frac{3}{4} \frac{T_{t,Ed} \cdot t_f}{I_T} = \frac{3}{4} \frac{0,6 \cdot 10^6 \cdot 8,5}{6,98 \cdot 10^4} = 54,8 \text{ Mpa}$	$\sigma_x = \frac{M_f}{W_z / 2} = \frac{3,13 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{28470 \text{ mm}^3 / 2} = 220 \text{ Mpa}$ $\tau_{yx} = 0$ $\tau_{zx} = 0$

Finalmente la superposición de tensiones en los puntos A y B analizados de la sección:

Punto A

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{yx}^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot (73\text{Mpa} + 3,7\text{Mpa})^2} = 132,8\text{Mpa} < f_y = 275\text{Mpa}$$

Punto B

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{zx}^2} = \sqrt{220\text{Mpa} + 3 \cdot (54,8\text{Mpa})^2} = 240\text{Mpa} < f_y = 275\text{Mpa}$$

Se puede concluir que la sección propuesta IPE200 resulta adecuada para el esfuerzo.