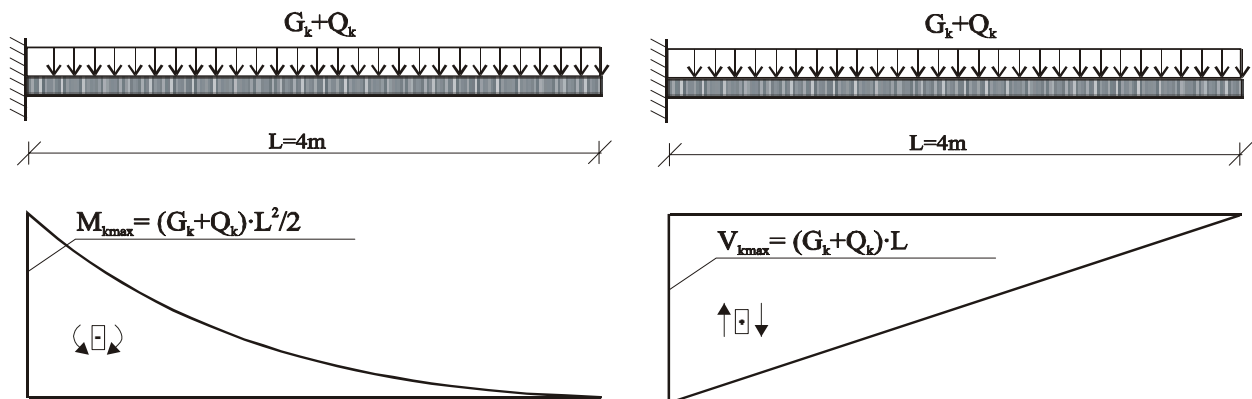


PROBLEMA N°3

Seleccionar en acero S355 una sección adecuada para la viga en ménsula que se muestra en la figura, siguiendo las indicaciones del EC3. La pieza deberá ser capaz de soportar una carga uniformemente repartida $Q_k=25kN/m$ y se encuentra eficazmente arriostrada transversalmente, de modo que puede descartarse su agotamiento por pandeo lateral.



SOLUCIÓN:

1º) E.L.U. de agotamiento por flexión

Comenzamos obteniendo la carga mayorada F_d que deberá soportar la pieza utilizando los coeficientes parciales de ponderación correspondientes al estado límite último para acciones constantes y variables respectivamente. Supondremos un peso propio de la viga $G_k=0,6kN/m$.

$$F_d = G_k \cdot \gamma_G + Q_k \cdot \gamma_Q = 0,6kN/m \cdot 1,35 + 25kN/m \cdot 1,5 = 38,3kN/m$$

G_k :	Acciones permanentes características	$0,6kN/m$
Q_k :	Acciones variables características	$25kN/m$
γ_G :	Coefficiente parcial para acciones constantes	$1,35$
γ_Q :	Coefficiente parcial para acciones variables	$1,5$
f_y :	Límite elástico del acero	$S355 = 355N/mm^2$
γ_M :	Coefficiente parcial de seguridad del acero	$1,1$

PIEZAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

Suponiendo un perfil con espesor de ala $t_f < 40mm$, la resistencia de cálculo f_{yd} a tomar será:

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_M} = \frac{355N/mm^2}{1,1} = 323N/mm^2$$

Sabemos que el máximo momento flector de cálculo está presente en el empotramiento y vale:

$$M_{sd} = \frac{F_d \cdot L^2}{2} = \frac{38,3kN/m \cdot (4m)^2}{2} = 306,4kNm$$

se precisa entonces una sección que sea capaz de aportar un momento resistente $M_{c,Rd}$ tal que

$$M_{c,Rd} > M_{sd} = 306,4kNm$$

Si estimamos que la sección será de Clase 1 (lo cual comprobaremos más tarde) el momento resistente de cálculo vendrá dado por el momento plástico de la sección $M_{pl,Rd}$

$$M_{c,Rd} = M_{pl,Rd} = W_{pl,y} \cdot f_{yd} > M_{sd} = 306,4kNm$$

$$W_{pl,y} > \frac{M_{sd}}{f_{yd}} = \frac{306,4 \cdot 10^6 N \cdot mm}{323N/mm^2} = 948607mm^3 \cong 949cm^3$$

$M_{c,Rd}$: Momento resistente

$M_{pl,Rd}$: Momento plástico de la sección

$W_{pl,y}$: Módulo resistente plástico respecto del eje fuerte y

Elegimos un **IPE360** que presenta un módulo plástico $W_{pl}=1020cm^3$ y unas características:

h : Canto total = 360mm

b : Anchura del ala = 170mm

c : Anchura del semiala = 85mm

r : Radio de la raiz = 18mm

d : Altura entre cordones = 298mm

t_f : Espesor del ala = 12,7mm

t_w : Espesor del alma = 8,0mm

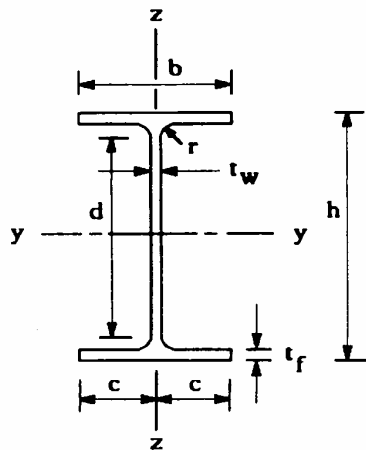
A : Área de la sección = $72,7\text{cm}^2$

I_y : Momento de inercia respecto del eje fuerte $y = 16270\text{cm}^4$

I_z : Momento de inercia respecto del eje débil $z = 1040\text{cm}^4$

G_k : Peso del perfil = $0,57\text{kN/m}$. Valor inferior al supuesto inicialmente de $0,6\text{kN/m}$.

1-a) Clasificación de la sección IPE360 a flexión simple.



El alma del perfil será de clase 1 si cumple:

$$CLASE\ 1 \Rightarrow \frac{d}{t_w} \leq 72 \cdot \varepsilon \quad (S355 \rightarrow \varepsilon = 0,81);$$

$$\frac{298}{9,0} = 33,11 < 72 \cdot \varepsilon = 58 \Rightarrow CLASE\ 1$$

El ala comprimida por flexión será de clase 1 si se verifica:

$$CLASE\ 1 \Rightarrow \frac{c}{t_f} \leq 10 \cdot \varepsilon; \quad \frac{85}{12,7} = 6,7 < 10 \cdot \varepsilon = 8,1 \Rightarrow CLASE\ 1$$

2º) E.L.U. de agotamiento por cortante

Vamos a evaluar la magnitud del esfuerzo cortante presente en la viga y si es necesaria una reducción en el momento resistente tomado para la sección. El máximo esfuerzo cortante se presenta, como nos indica el diagrama, en la sección de empotramiento. Su valor de cálculo es

$$V_{sd} = V_{k\max} \cdot \gamma_f = (G_k \cdot \gamma_G + Q_k \cdot \gamma_Q) \cdot L = F_d \cdot L = 38,3\text{kN/m} \cdot 4\text{m} = 153,2\text{kN}$$

Para que no se produzca un agotamiento por cortante se requiere que la sección transversal presente una resistencia plástica de cálculo a cortante $V_{pl.Rd}$ tal que se cumpla:

$$V_{pl.Rd} > V_{sd} = 153,2\text{kN}$$

siendo

$$V_{pl.Rd} = A_v \cdot \frac{(f_y / \sqrt{3})}{\gamma_M} > V_{sd} = 153,2\text{kN}$$

PIEZAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

donde A_v , representa el área resistente a cortante de la sección que para perfiles I y H vale:

$$A_v = A - 2 \cdot b \cdot t_f + (t_w + 2 \cdot r) \cdot t_f =$$

$$72,7 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 17 \text{ cm} \cdot 1,27 \text{ cm} + (0,8 \text{ cm} + 2 \cdot 1,8 \text{ cm}) \cdot 1,27 \text{ cm} = 35,1 \text{ cm}^2$$

En el caso de secciones transversales en I y cuando el plano de carga es el de simetría del alma el EC3 permite calcular el área resistente a cortante mediante una expresión aproximada que conduce a unos resultados similares siempre del lado de la seguridad:

$$A_{v,aprox.} = 1,04 \cdot h \cdot t_w = 1,04 \cdot 36 \text{ cm} \cdot 0,8 \text{ cm} \cong 30 \text{ cm}^2 < A_{v,real} = 35,1 \text{ cm}^2$$

De modo que la resistencia plástica de cálculo a cortante $V_{pl.Rd}$ valdrá en nuestro caso:

$$V_{pl.Rd} = A_v \cdot \frac{(f_y / \sqrt{3})}{\gamma_M} = 35,1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2 \cdot \frac{\left(\frac{355 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3}} \right)}{1,1} = 654 \text{ kN} \gg V_{sd} = 153,2 \text{ kN}$$

valor superior al cortante de cálculo que además, al no alcanzar el 50% de la resistencia plástica a cortante, no implica reducción alguna en el momento resistente ya calculado.

$$V_{sd} = 153,2 \text{ kN} < 50\% (V_{pl.Rd}) = 327 \text{ kN} \Rightarrow M_{c.Rd} = M_{pl.Rd}$$

(*) ¿Qué sucedería si el cortante de cálculo V_{sd} alcanzara un 65% ó un 75% de $V_{pl.Rd}$?

En este caso el momento resistente de la sección $M_{v.Rd}$ se calcula empleando un límite elástico reducido para el área de cortante que depende de la relación entre el cortante solicitante y el correspondiente valor de agotamiento.

$$M_{v.Rd} = \left[W_{pl} - \frac{p \cdot A_v^2}{4 \cdot t_w} \right] \cdot \frac{f_y}{\gamma_M}$$

$$p = \left(\frac{2 \cdot V_{sd}}{V_{pl.Rd}} - 1 \right)^2 \begin{cases} \text{Si } V_{sd} = 0,65 \cdot V_{pl.Rd} \rightarrow p = \left(\frac{2 \cdot 0,65 \cdot V_{pl.Rd}}{V_{pl.Rd}} - 1 \right)^2 = 0,09 \\ \text{Si } V_{sd} = 0,75 \cdot V_{pl.Rd} \rightarrow p = \left(\frac{2 \cdot 0,75 \cdot V_{pl.Rd}}{V_{pl.Rd}} - 1 \right)^2 = 0,25 \end{cases}$$

Así tendríamos unos momentos resistentes $M_{v.Rd}$:

$$(V_{sd} = 65\% \cdot V_{pl.Rd}) \Rightarrow M_{v.Rd} = \left[1020 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 - \frac{0,09 \cdot (35,1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)^2}{4 \cdot 8 \text{ mm}} \right] \cdot \frac{355 \text{ N/mm}^2}{1,1} = 318 \text{ kNm}$$

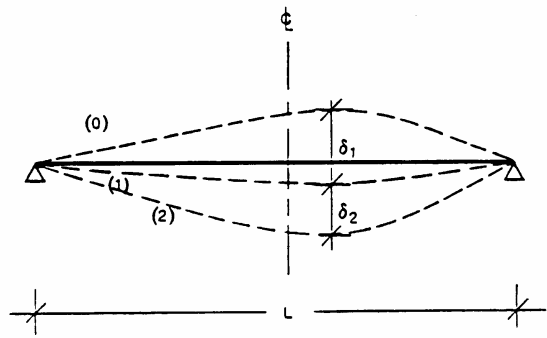
$$(V_{sd} = 75\% \cdot V_{pl.Rd}) \Rightarrow M_{v.Rd} = \left[1020 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 - \frac{0,25 \cdot (35,1 \cdot 10^2 \text{ mm}^2)^2}{4 \cdot 8 \text{ mm}} \right] \cdot \frac{355 \text{ N/mm}^2}{1,1} = 298 \text{ kNm}$$

Si recordamos que el momento de cálculo valía $M_{sd} = 306,4 \text{ kNm}$, los resultados indican que el perfil seleccionado IPE360 seguiría siendo válido en el caso de $V_{sd} = 65\% \cdot V_{pl.Rd}$, ($M_{v.Rd} > M_{sd}$) pero no sería seguro para la situación de un cortante $V_{sd} = 75\% \cdot V_{pl.Rd}$ en donde $M_{v.Rd} < M_{sd}$.

3º) E.L.S. de flecha máxima

Para analizar este estado límite de servicio calcularemos la flecha en el extremo de la ménsula teniendo en cuenta que los coeficientes de ponderación serán unitarios: $\gamma_f = 1,0$.

La flecha total para una viga genérica (EC3) se obtiene como:



$$\delta_{\max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0$$

$\delta_{\max}$: flecha máxima en el estado final

δ_1 : flecha debida a cargas permanentes

δ_2 : flecha debida a cargas variables

δ_0 : contraflecha en estado de descarga

En nuestro caso tenemos $\delta_0 = 0$

La expresión que nos da la flecha para una ménsula de longitud L flectada respecto de su eje fuerte y-y sometida a una carga uniformemente repartida de intensidad genérica p es:

$$\delta = \frac{p \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I_y} \begin{cases} \delta_1 = \frac{G_k \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I_y} = \frac{0,57 \text{ N/mm} \cdot (4000 \text{ mm})^4}{8 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 16270 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 0,53 \text{ mm} \\ \delta_2 = \frac{Q_k \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I_y} = \frac{25 \text{ N/mm} \cdot (4000 \text{ mm})^4}{8 \cdot 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 16270 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 23,4 \text{ mm} \end{cases}$$

Por lo tanto la flecha máxima, presente en el extremo libre de la viga valdrá:

$$\delta_{\max} = \delta_1 + \delta_2 - \delta_0 = 0,53mm + 23,4mm \cong 24mm$$

En la tabla 4.1 del EC3 se nos recomiendan unos valores límites para la flecha máxima y para la flecha δ_2 debida a la carga variable. Se indica expresamente que para vigas en ménsula, la longitud a considerar será dos veces la longitud del proyecto del voladizo. Tomando un caso general, deberíamos cumplir los límites:

$$\delta_{\max} \leq \frac{L}{250}; \quad \delta_{\max} = 24mm < \frac{2 \cdot 4000mm}{250} = 32mm \rightarrow \text{Válido}$$

$$\delta_2 \leq \frac{L}{300}; \quad \delta_2 = 23,4mm < \frac{2 \cdot 4000mm}{300} = 26,6mm \rightarrow \text{Válido}$$

Podemos concluir finalmente que el perfil seleccionado, un IPE360 resulta idóneo.

¿Cuál será la magnitud de la carga horizontal uniformemente repartida que junto con la ya aplicada en sentido gravitatorio haría agotarse el perfil seleccionado?

Como sabemos las vigas sometidas a flexión esviada presentan un eje neutro oblicuo cuya inclinación depende de la relación de momentos aplicados y de la forma de la sección. La expresión de agotamiento para la acción conjunta de flexión en dos planos viene dada por:

$$\left[\frac{M_{y.Sd}}{M_{cy.Rd}} \right]^{\alpha} + \left[\frac{M_{z.Sd}}{M_{cz.Rd}} \right]^{\beta} \leq 1$$

Expresión en la que ya conocemos el momento flector de cálculo para las cargas verticales:

$$M_{y.Sd} = \frac{F_d \cdot L^2}{2} = \frac{38,3kN/m \cdot (4m)^2}{2} = 306,4kNm$$

el momento resistente para la flexión respecto del eje fuerte:

$$M_{cy.Rd} = M_{ply.Rd} = W_{pl.y} \cdot f_{yd} = 1020000mm^3 \cdot 0,323kN/mm^2 = 329,4kNm$$

y los coeficientes α y β que para secciones I ó H se pueden tomar como $\alpha=2$ y $\beta=1$.

A continuación vamos a obtener $M_{cz.Rd}$, que representa el momento resistente para la flexión respecto del eje débil (plano horizontal) y de la expresión deduciremos el momento de cálculo de agotamiento para la flexión en dicho plano $M_{z.Sd}$ obteniendo finalmente la carga asociada.

Teniendo que cuenta que el módulo plástico respecto del eje débil es $W_{pl.z}=191,1cm^3$, se tiene:

$$M_{cz.Rd} = M_{plz.Rd} = W_{pl.z} \cdot f_{yd} = 191100mm^3 \cdot 0,323kN/mm^2 = 61,7kNm$$

$$\left[\frac{M_{y.Sd}}{M_{cy.Rd}} \right]^{\alpha} + \left[\frac{M_{z.Sd}}{M_{cz.Rd}} \right]^{\beta} \leq 1; \quad \left[\frac{306,4kNm}{329,4kNm} \right]^2 + \left[\frac{M_{z.Sd}}{61,7kNm} \right]^1 \leq 1$$

$$[0,93]^2 + \frac{M_{z.Sd}}{61,7} \leq 1 \Rightarrow M_{z.Sd} \leq 8,31kNm$$

$$M_{z.Sd} = \frac{F_{zd} \cdot L^2}{2} \leq 8,31kNm \Rightarrow F_{zd} \leq \frac{8,31kNm \cdot 2}{(4m)^2} = 1,04kN/m$$

En términos de carga de servicio con $\gamma_Q=1,5$ tendríamos finalmente $F_{zkm\max}=0,69kN/m$