

CRISTALOGRAFÍA GEOMÉTRICA

TEMA 4

SIMETRÍA PUNTUAL

ÍNDICE

- 4.1 Introducción
- 4.2 Grupos puntuales y clases cristalinas
- 4.3 Reglas que condicionan la presencia de varios elementos de simetría en un mismo grupo puntual
- 4.4 Sistemas cristalinos
- 4.5 Símbolo de los grupos puntuales
- 4.6 Operaciones de simetría de los grupos puntuales
- 4.7 Grupos puntuales planos y grupos puntuales de las redes planas
- 4.8 Grupos puntuales tridimensionales y grupos puntuales de las redes tridimensionales
- 4.9 Formas cristalinas
- 4.10 Concepto de zona y eje de zona
- 4.11 Haz de normales
- Proyecciones cristalográficas
 - 4.12 Esfera de polos
 - 4.13 Proyección estereográfica
 - 4.14 Proyección estereográfica de los ejes cristalográficos, las zonas y polos de las caras de los distintos sistemas cristalinos
- 4.15 Cálculos cristalográficos

4.1 INTRODUCCIÓN

La morfología cristalina ha proporcionado los datos experimentales para el desarrollo de la Cristalografía matemática hasta el descubrimiento en 1912 de la difracción de los rayos X por los cristales.

LEY DE LOS ÁNGULOS DIEDROS (Romé de l'Isle, 1772-1783)

Los ángulos diedros que forman las caras equivalentes de diversos cristales de una sustancia son iguales y característicos de ella, sea cual sea la forma del cristal (ver Figura 4.1).

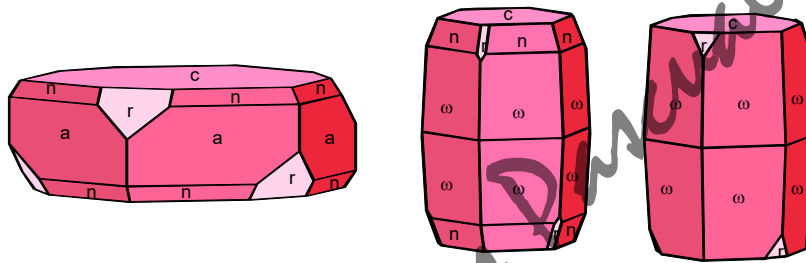


Figura 4.1.- Corindón mostrando diferentes hábitos en los que se cumple que el ángulo entre las caras r y n de las figuras del centro y de la derecha son iguales. También son iguales el ángulo entre las caras r y ω de los cristales de la derecha y del centro.

LEY DE LA SIMETRÍA (Haüy, 1803):

Todos los cristales de una misma sustancia poseen la misma simetría, sean cuales sean las caras que presenten (ver Figura 4.2).

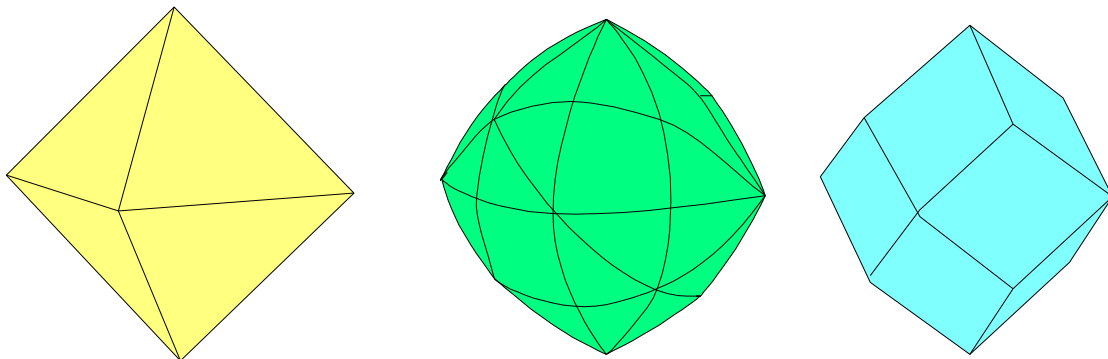


Figura 4.2.- Cristales de la misma especie cristalina mostrando diferentes hábitos pero con la misma simetría cúbica.

LEY DE LA RACIONALIDAD DE LOS ÍNDICES (Haüy, 1781):

Las aristas intersección de tres caras de un cristal permiten definir un sistema de ejes de coordenadas. La distancia a la que una cuarta cara corta a cada eje se le considera la unidad de medida sobre este eje. Todas las restantes caras del cristal cortan a dichos ejes a unas distancias cuya razón con las longitudes definidas como unidades son números racionales y en general sencillos (ver Figura 4.3).

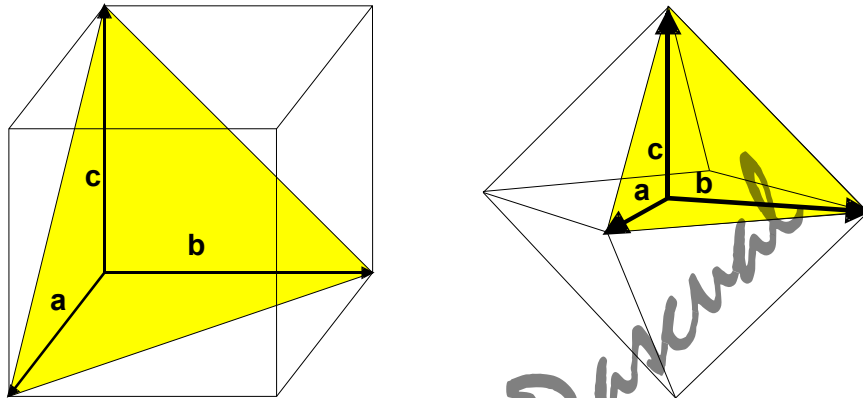


Figura 4.3.- Cara cristalina (111) cortando a las traslaciones fundamentales a , b y c a la distancia unidad.

4.2 GRUPOS PUNTUALES Y CLASES CRISTALINAS

- Un grupo puntual se define como el conjunto de operaciones de simetría existentes en una red cristalina.
- Tiene todas las características de un grupo matemático.
- Existe un punto en el espacio que es equivalente a sí mismo, el cual se toma, normalmente, como origen de coordenadas.
- A los grupos puntuales se les llama muchas veces clases cristalinas.
- Se les da diversos nombres:
 - algunos derivan de las formas geométricas que poseen la simetría del grupo puntual
 - otros nombres describen las características del grupo.
 - en la actualidad se usa, cada vez más, un símbolo en vez de un nombre para referirse a los distintos grupos puntuales.

Grupos puntuales planos

Grupos puntuales tridimensionales

- **Orden del grupo** es el número de elementos que lo constituyen.

Si el grupo tiene n elementos, el grupo es de orden n .

- Un **subgrupo** se define como el conjunto de elementos de un grupo que por sí solos cumplen las condiciones de grupo.

CARACTERÍSTICAS QUE DEBE CUMPLIR UN GRUPO MATEMÁTICO

- Cualquier combinación de dos o más elementos (u operaciones) debe ser equivalente a un elemento que pertenezca también al grupo.
 - La combinación es una multiplicación, es decir, la realización sucesiva de operaciones de simetría.
 - Esta operación puede expresarse así:

$$AB = C$$
 Donde:
 A, B y C son elementos del grupo, al que consideramos finito, pues el número de elementos de simetría es finito.
 - En el grupo puntual $2/m$, 2 y m son elementos que pertenecen al grupo y su combinación es equivalente a otro elemento $\bar{1}$, que también pertenece al grupo.
 - En la figura 4.4 A el punto 2 se obtiene aplicando al punto 1 la reflexión y a continuación el eje 2.

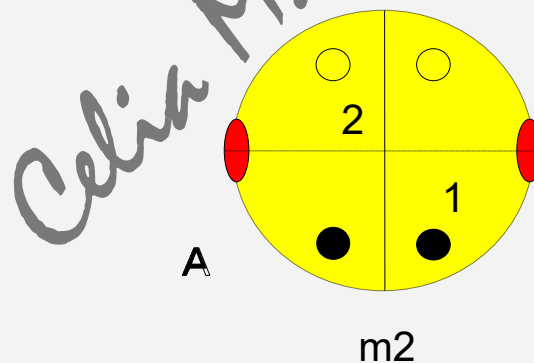


Figura 4.4 A.- La combinación de la reflexión (aplicada al punto 1) y después la rotación binaria (aplicada al punto 1 reflejado) origina el punto 2. El mismo resultado se obtiene si se aplica al punto 1 la inversión. Por lo tanto la línea de simetría, la rotación binaria y el punto de rotación- inversión monaria pertenecen al grupo.

- En la figura 4.4 B, el punto 2 se obtiene aplicando al punto 1 el centro de simetría. La combinación del plano m y el eje 2 sobre el punto 1 es equivalente a la actuación del centro de simetría sobre el punto 1.

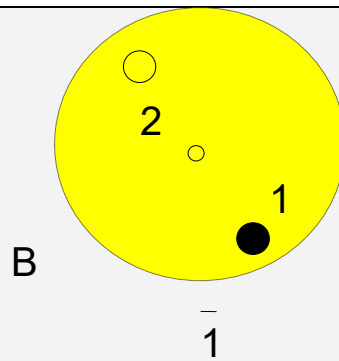


Figura 4.4 B

- En el grupo debe existir un elemento tal que pueda combinarse con todos los demás elementos del grupo, dejándolos a todos inalterados.
 - Se trata del eje monario o la identidad.
 - Esta propiedad puede expresarse así:

$$AE = A$$

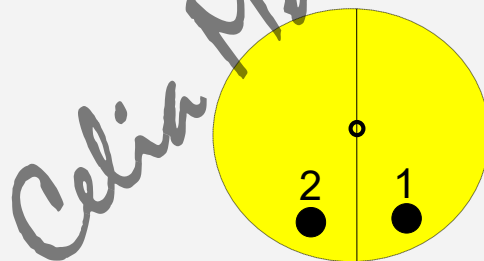
Donde:

A es cualquier elemento del grupo

E es la identidad o el eje monario.

- La combinación del elemento identidad con todos los demás elementos debe ser conmutativa, es decir:

$$AE = EA = A$$



$$m1=1m=m$$

Figura 4.5.- La combinación de la reflexión con la rotación monaria origina la reflexión y la combinación de la rotación monaria y la reflexión origina, igualmente, la reflexión.

- La combinación de elementos debe ser asociativa. Significa que debe cumplirse la siguiente relación:

$$A(BC) = (AB)C$$

Donde:

A, B y C son elementos del grupo.

- Cada uno de los elementos del grupo posee el elemento inverso, de forma que el

producto del elemento por su inverso es igual al elemento identidad.

$$AX = E$$

Donde:

A es un elemento del grupo,

X es su elemento inverso

E es la identidad.

Además, si X es el inverso de A, A debe ser el inverso de X:

$$AX = XA = E$$

Cuadro 4.1

4.3 REGLAS QUE CONDICIONAN LA PRESENCIA DE VARIOS ELEMENTOS DE SIMETRÍA EN UN MISMO GRUPO PUNTUAL

1. Si existe un eje de rotación de orden par y un plano de reflexión perpendicular a él, existe un centro de simetría en su intersección.
2. Si una serie de planos de simetría se cortan en un eje de simetría, existen tantos planos como el orden del eje.
3. Si un eje de rotación de orden n tiene ejes binarios perpendiculares a él, habrá tantos ejes binarios como sea el orden del eje.
4. Si existe un eje binario perpendicular a un eje de rotación inversión, cuyo orden n es par, existen n/2 planos que intersectan con el eje y n/2 ejes binarios perpendiculares a él.

4.4 SISTEMA CRISTALINO

Se define como el conjunto de grupos puntuales compatibles con las redes de Bravais.

En el siglo pasado se agrupaban los grupos puntuales en unas clases que la mayoría de los autores denominan sistemas cristalinos, aunque también se han usado los términos de singonía y tipo cristalino.

Se dice que dos o más grupos puntuales pertenecen al mismo sistema cristalino si admiten las mismas redes de Bravais. De esta manera aparecen 7 sistemas cristalinos.

Sistema cristalino	Redes de Bravais
Triclínico	P
Monoclínico	P, A (B,C)
Rómbico	P, I, F, A (B,C)

Tetragonal	P, I
Hexagonal	P
Romboédrico	P
Cúbico	P, I, F

Tabla 4.4

CRUZ AXIAL

Son las constantes reticulares características de cada sistema.

Sistema cristalino	Cruz axial
Triclínico	$a \neq b \neq c$
Monoclínico	$a \neq b \neq c$
Rómbico	$a \neq b \neq c$
Tetragonal	$a = b \neq c$
Hexagonal	$a = b \neq c$
Romboédrico	$a = b \neq c$
Cúbico	$a = b = c$

Tabla 4.5

ÁNGULOS DE LA CRUZ AXIAL

Son los ángulos que forman las constantes reticulares.

Sistema cristalino	Ángulos de la cruz axial
Triclínico	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoclínico	$\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
Rómbico	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Hexagonal	$\alpha = \beta = 90^\circ \gamma = 60^\circ \text{ ó } 120^\circ$
Romboédrico	$\alpha = \beta = 90^\circ \gamma = 60^\circ \text{ ó } 120^\circ$
Cúbico	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

Tabla 4.6

ELECCIÓN DE LA CRUZ AXIAL EN CADA SISTEMA CRISTALINO

- Las cruces axiales de cada sistema coinciden con las 7 celdas de Bravais primitivas (P).
- Se construyen de modo que los ejes de coordenadas coincidan con los elementos de simetría del material en estado cristalino.
- Cuando existe un eje de rotación de orden superior al binario, la dirección del eje c se elige según la dirección de dicho eje.

- Las direcciones de los ejes a y b se eligen según los ejes binarios si existen.
- En el sistema rómbico, las direcciones de a , b y c se eligen según los ejes binarios cuando existen.
- En el sistema monoclinico la dirección de b se elige según el único eje binario si existe.
- En el sistema triclinico la elección de a , b y c se hace seleccionando las tres aristas más pequeñas y no coplanarias.
- Cuando se considera la simetría externa de un cristal, se acostumbra a utilizar los ejes x , y y z .
 - Serían los ejes de coordenadas sobre los que se sitúan las constantes a , b y c .
 - El eje z se orienta de arriba abajo
 - El eje y de derecha a izquierda
 - El eje x de atrás hacia delante.
 - La elección de dichos ejes sobre el cristal se haría de la misma manera que para la elección de las direcciones de a , b y c

4.5 SÍMBOLO DE LOS GRUPOS PUNTUALES

Existen dos tipos de símbolos.

1. Notación de Schoenflies, que es la más antigua de todas.
 - Consiste de una letra mayúscula, característica del tipo del grupo puntual,
 - Puede ir acompañada de uno o más subíndices:
 - Uno de ellos numérico
 - El otro una letra minúscula
 - cuando existen ambos se escriben en este orden
2. Notación de Hermann Mauguin (o notación internacional)
 - Consiste en sucesión de números y la letra m (plano de reflexión)
 - Corresponden a los símbolos que representan los distintos elementos de simetría.
 - Pueden incluir:
 - Barra de quebrado
 - Denominador es la letra m
 - Numerador es un número que hace referencia al orden de un eje de rotación.
 - Pueden simplificarse algunos símbolos si no da lugar a confusión con otros símbolos

OBTENCIÓN DEL SÍMBOLO DE LOS GRUPOS PUNTUALES

Para obtener el símbolo de un grupo puntual, de acuerdo a la notación internacional, hay que tener en cuenta las direcciones de simetría de la red plana (Tabla 4.7) o tridimensional (Tabla 4.8), según que el grupo puntual sea plano o tridimensional.

Red	Direcciones de simetría		
	Posición en notación de Hermann-Mauguin		
		Secundarias	Terciarias
Oblicua	Punto de rotación en el plano		
Rectangular		[10]	[01]
Cuadrada		[10] [01]	[1 $\bar{1}$] [11]
Hexagonal		[10] [01] [$\bar{1}$ 1]	[1 $\bar{1}$] [12] [$\bar{2}$ 1]

Tabla 4.7

Redes	Direcciones de Simetría		
	Primaria	Secundaria	Terciaria
Triclínico	Ninguna		
Monoclínico	[010] or [001] or [100]		
Rómbico	[100]	[010]	[001]
Tetragonal	[001]	[100] [010]	[1 $\bar{1}$ 0] [110]
Hexagonal	[001]	[100] [010] [1 $\bar{1}$ 0]	[1 $\bar{1}$ 0] [120] [2 $\bar{1}$ 0]
Romboédrico	[001]	[100][001] [1 $\bar{1}$ 0]	
Romboédrico	[111]	[1 $\bar{1}$ 0] [01 $\bar{1}$] [101]	
Cúbico	[100] [010] [001]	[111] [1 $\bar{1}$ 1] [1 $\bar{1}$ 1] [1 $\bar{1}$ 1]	[1 $\bar{1}$ 0] [01 $\bar{1}$] [101] [110] [011] [101]

Tabla 4.8

- Se distinguen tres direcciones de simetría:
 - primarias, secundarias y terciarias.
 - En las redes triclínicas no hay ninguna dirección de simetría.
 - En las redes monoclínicas hay una dirección de simetría.
 - En las redes romboédricas hay dos direcciones de simetría, pero hay que tener en cuenta que se elijan ejes hexagonales o romboédricos.
 - En las redes rómbicas, tetragonales, hexagonales y cúbicas hay tres direcciones.
- En el símbolo de los grupos puntuales de los sistemas triclínico y monoclínico sólo

hace falta especificar el elemento de simetría existente (1 o -1) en el triclínico y el elemento de simetría existente en la única dirección de simetría del monoclinico.

- En el caso de los grupos puntuales del sistema romboédrico hay que especificar los elementos de simetría existentes en las dos direcciones de simetría.
- En el caso de los grupos puntuales de los sistemas rómbico, tetragonal, hexagonal y cúbico hay que especificar los elementos de simetría existentes en las tres direcciones de simetría.
- En el caso de que en alguna de las direcciones de simetría no haya ningún elemento de simetría no se escribe nada.

Nota: Cuando hay más de una dirección de simetría en la columna de las direcciones primarias, secundarias o terciarias para un determinado sistema cristalino, significa que son equivalentes.

Cuadro 4.3

4.6 GRUPOS PUNTUALES Y CLASES CRISTALINAS

OPERACIONES DE SIMETRÍA DE LOS GRUPOS PUNTUALES

- Rotaciones propias
 - Rotaciones de orden 1, 2, 3, 4, 6
- Rotaciones impropias
 - Rotaciones de orden $\bar{1}$, $\bar{2}$ (reflexión), $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$
- El número total de grupos puntuales es de 32.
 - Se les da diversos nombres, algunos derivan de las formas geométricas que poseen la simetría del grupo puntual, mientras que otros nombres describen las características del grupo.

CLASES CRISTALINAS

A los grupos puntuales se les llama muchas veces *clases cristalinas* (ver Cuadro 4.2).

En función de los elementos de simetría, se distinguen:

- Holoedría

Es la clase cristalina que posee el mayor número de operaciones de simetría.
- Hemiedría

Es la clase que posee la mitad de las operaciones de simetría. A su vez, puede ser:

 - Paramórfica: Se caracteriza porque conserva el centro de simetría.
 - Enantiomórfica: En ella no hay planos de simetría.

- Hemimórfica: Se caracteriza porque los ejes de simetría son polares.
- Tetartoedría Es la clase cristalina que posee la cuarta parte de las operaciones de simetría.

En las Tablas 4.9 a 4.15 se presentan, para cada uno de los 7 sistemas cristalinos, los grupos puntuales con la notación de Hermann Mauguin y la de Schoenflies entre paréntesis, las respectivas clases cristalinas, las operaciones de simetría y los elementos de simetría expresados mediante la fórmula que se describe en el Cuadro 4.4

FÓRMULA PARA EXPRESAR LOS ELEMENTOS DE SIMETRÍA DE UN DETERMINADO GRUPO PUNTUAL

La fórmula consta de una serie de caracteres que expresan los elementos de simetría.

Los símbolos utilizados son los siguientes:

- C indica centro de simetría
- E indica eje de simetría
 - El número de ejes de simetría de un determinado tipo se expresa colocando dicho número delante de la letra E.
 - El tipo de ejes de simetría se expresa colocando el símbolo del eje correspondiente, de acuerdo a la notación de Hermann-Mauguin, en forma de superíndice a la derecha de la letra E.
 - Ejemplo: La fórmula para indicar que existen 4 ejes ternarios de rotación inversión sería la siguiente:

$$4E^3$$

- m indica plano de reflexión

Ejemplo: La fórmula para indicar que existen 3 ejes binarios y 4 ejes ternarios sería la siguiente:

$$3E^2, 4E^3$$

Cuadro 4.4

Sistema cristalino triclinico

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
$\bar{1}$ (C_1)	HOLOEDRÍA	2	C
1 (C_i)	HEMIEDRÍA	1	IDENTIDAD

Tabla 4.9

Sistema cristalino monoclinico

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
2/m (C_{2h})	HOLOEDRÍA	4	$1E^2$, m, C
2 (C_2)	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	2	$1E^2$
m (C_s)	HEMIEDRÍA HEMIMÓRFICA	2	m

Tabla 4.10

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
mmm (D_{2h})	HOLOEDRÍA	8	$3E^2$, 3m, C
222 (D_2)	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	4	$3E^2$
mm2 (D_{2v})	HEMIEDRÍA HEMIMÓRFICA	4	2m, $1E^2$

Tabla 4.11

Sistema cristalino tetragonal

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
4/mmm (D_{4h})	HOLOEDRÍA	16	$1E^4$, $4E^2$, 5m, C
4mm (C_{4v})	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	8	$1E^4$, 5m
$\bar{4}2m$ (D_{2d})	HEMIEDRÍA con INVERSIÓN	8	$1E^{\bar{4}}$, $2E^2$, 2m
422 (D_4)	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	8	$1E^4$, $4E^2$
4/m (C_{4h})	HEMIEDRÍA PARAMÓRFICA	8	$1E^4$, 1m, C
$\bar{4}$ (S_4)	TETARTOEDRÍA con INVERSIÓN	4	$1E^{\bar{4}}$
4 (C_4)	TETARTOEDRÍA	4	$1E^4$

Tabla 4.12

Sistema cristalino romboédrico

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
$\bar{3}m$ (D_{3d})	HOLOEDRÍA	12	$1E^3, 3E^2, 3m, C$
$3m$ (C_{3v})	HEMIEDRÍA HEMIMÓRFICA	6	$1E^3, 3m$
32 (D_3)	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	6	$1E^3, 3E^2$
$\bar{3}$ (C_{3i})	HEMIEDRÍA PARAMÓRFICA	6	$1E^3, C$
3 (C_3)	TETARTOEDRÍA	3	$1E^3$

Tabla 4.13

Sistema cristalino hexagonal

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
$6/mmm$ (D_{6h})	HOLOEDRÍA	24	$1E^6, 6E^2, 7m, C$
$\bar{6}2m$ (D_{3h})	HEMIEDRÍA con INVERSIÓN	12	$1E^3, 3E^2, 4m, C$
$6mm$ (C_{6v})	HEMIEDRÍA HEMIMÓRFICA	12	$1E^6, 6m$
622 (D_6)	HEMIEDRÍA ENANTIOMÓRFICA	12	$1E^6, 6E^2$
$6/m$ (C_{6h})	HEMIEDRÍA PARAMÓRFICA	12	$1E^6, 1m, C$
$\bar{6}$ (C_{3h})	TETARTOEDRÍA con INVERSIÓN	6	$1E^3, 1m, C$
6 (C_6)	TETARTOEDRÍA	6	$1E^6$

Tabla 4.14

Sistema cristalino cúbico

G. PUNTUAL	CLASE CRISTALINA	Nº OPERACIONES	ELEMENTOS DE SIMETRÍA
$m\bar{3}m$ (O_h)	HOLOEDRÍA	48	$3E^4, 4E^3, 6E^2, 9m, C$
$\bar{4}3m$ (T_d)	HEMIEDRÍA con INVERSIÓN	24	$3E^{\bar{4}}, 4E^3, 6m$
432 (O)	HEMIEDRÍA	24	$3E^4, 4E^3, 6E^2$

	ENANTIOMÓRFICA		
$m\bar{3} (T_h)$	HEMIEDRÍA PARAMÓRFICA	24	$3E^2, 4E^3, 3m, C$
23 (T)	TETARTOEDRÍA	12	$3E^2, 4E^3$

Tabla 4.15

En las Tablas 4.16 a 4.22 se presentan los grupos puntuales y las clases cristalinas correspondientes a cada sistema cristalino según aparecen en las Tablas Internacionales de Cristalografía, Volumen A. Se presentan la clase, grupo puntual, las formas generales, especiales y la proyección estereográfica de la forma general de cada una de las clases cristalinas del correspondiente sistema cristalino, como aparecen en las Tablas Internacionales de Cristalografía.

Clase	Formas especiales	Formas generales	Proyección estereográfica
Símbolo abreviado Símbolo completo	Nombre y notación de las formas	Nombre de las formas y notación de todas	Punto: cara hemisferio superior Círculo: cara hemisferio inferior Proyección elementos de simetría: Centro: ○ Planos: líneas gruesas Rotación propia: 2 ● 3 ▲ 4 ■ 6 ● Rotación impropia: -3 ◐ -4 ◑ -6 ◒

SISTEMA CRISTALINO TRICLÍNICO

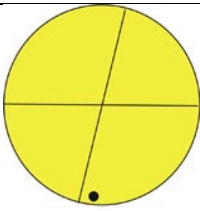
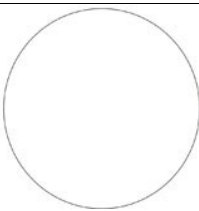
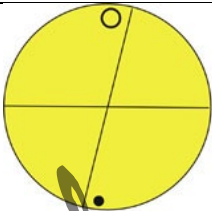
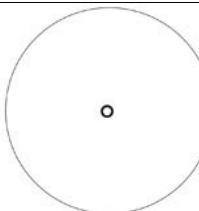
CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Pedial (Hemiedría)	1	No hay	Pediones (hkl)	 
Pinacoidal (Holoedría)	$\bar{1}$	No hay	Pinacoide $(hkl)(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$	 

Tabla 4.16

SISTEMA CRISTALINO MONOCLÍNICO

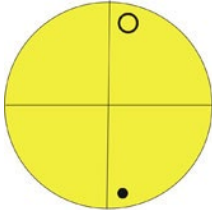
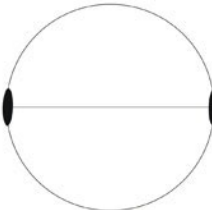
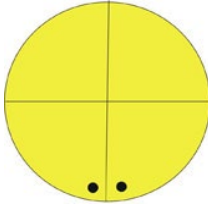
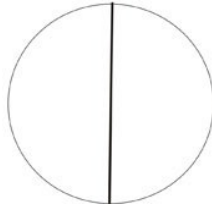
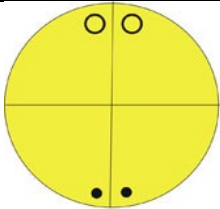
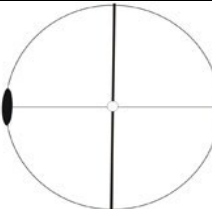
CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Esfenoidal (Hemiedría enantiomórfica)	2	Pedión (010) o $(0\bar{1}0)$ Pinacoides $\{h0l\}$	Esfenoide $(hkl), (\bar{h}\bar{k}\bar{l})$	 
Domática (Hemiedría hemimórfica)	m	Pediones $(h0l)$ Pinacoides $\{010\}$	Domo $(hkl), (\bar{h}\bar{k}\bar{l})$	 
Prismática (Holoedría)	$2/m$	Pinacoides $\{010\}, \{h0l\}$	Prisma $(hkl)(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(h\bar{k}\bar{l})$	 

Tabla 4.17

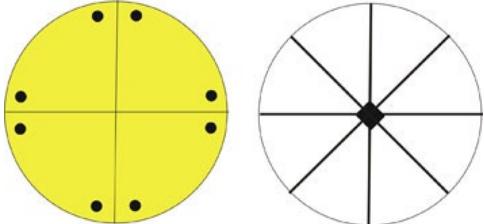
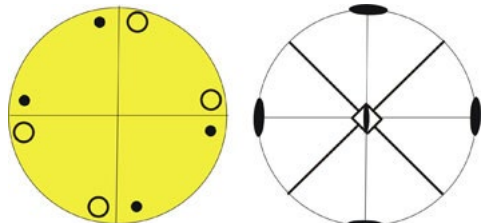
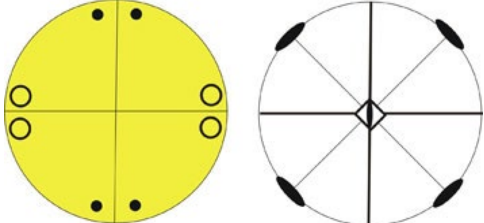
SISTEMA CRISTALINO RÓMBICO R = rómbico

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Esfenoidal (Hemiedría enantiomórfica)	222	Pinacoides $\{100\}, \{010\}, \{001\}$ Prismas R $\{hk0\}, \{0kl\}, \{h0l\}$	Biesfenoide R $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)$	
Piramidal (Hemiedría hemimórfica)	$mm2$	Pediones (001) o $(00\bar{1})$ Pinacoide $\{100\}$ Prisma R $\{hk0\}$ Domos $\{h0l\}, \{0kl\}$	Pirámide R $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(h\bar{k}l)(\bar{h}kl)$	
Bipiramidal (Holoedría)	mmm o $2/m\ 2/m\ 2/m$	Pinacoides $\{100\}, \{010\}, \{001\}$ Prismas R $\{hk0\}, \{h0l\}, \{0kl\}$	Bipirámide R $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)$ $(\bar{h}\bar{k}l)(hkl)(h\bar{k}l)(\bar{h}kl)$	

Tabla 4.18

SISTEMA CRISTALNO TETRAGONAL T = tetragonal DT = ditetragonal

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Piramidal (Tetartoedría)	4	Pediones (001) o $(00\bar{1})$ Prisma T $\{hk0\}$	Pirámide T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$	
Esfenoidal (Tetartoedría con inversión)	$\bar{4}$	Pinacoide $\{001\}$ Prisma T $\{hk0\}$	Biesfenoides T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}k\bar{l})(h\bar{k}l)(khl)(\bar{k}hl)$	
Bipiramidal (Hemiedría enantiomórfica)	$4/m$	Pinacoide $\{001\}$ Prisma T $\{hk0\}$	Bipirámide T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}k\bar{l})(h\bar{k}l)(khl)(\bar{k}hl)$	
Trapezoédrica (Hemiedría enantiomórfica)	422	Pinacoide $\{001\}$ Prismas T $\{100\}, \{110\}$ Prisma DT	Trapezoedro T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}k\bar{l})(h\bar{k}l)(khl)(\bar{k}hl)$	

		$\{hk0\}$ Bipirámides T $\{hhl\}$, $\{h0l\}$		
Ditetragonal (Hemiedría hemimórfica)	$4mm$	Pediones (001) o $(00\bar{1})$ Prismas T $\{100\}$ Prismas DT $\{hk0\}$ Pirámide T $\{hhl\}$, $\{h0l\}$	Pirámide DT $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$ $(h\bar{k}l)(\bar{h}kl)(\bar{k}\bar{h}l)(khl)$	
Escalenoédrica (Hemiedría con inversión)	$\bar{4}2m$	Pinacoide $\{001\}$ Prismas T $\{100\}$, $\{110\}$ Prismas DT $\{hk0\}$ Bipirámides $\{h0l\}$ Biesfenoides T $\{hhl\}$	Escalenoedro T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}\bar{h}l)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(\bar{k}hl)(khl)$	
Escalenoédrica (Hemiedría con inversión)	$\bar{4}m2$	Pinacoides $\{001\}$ Prismas T $\{110\}$, $\{1\bar{1}0\}$ Prisma DT $\{hk0\}$ Bipirámides $\{hhl\}$	Escalenoedro T $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}\bar{h}l)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(\bar{k}hl)(khl)$	

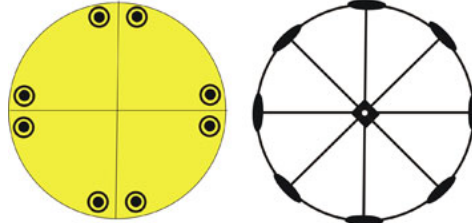
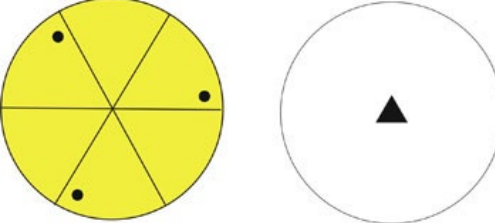
		Biesfenoides T $\{h0l\}$		
Ditetragonal bipiramidal (Holoedría)	$\frac{4}{m}mm$ o $\frac{4}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$	Pinacoide $\{001\}$ Prismas T $\{100\}$, $\{110\}$ Prisma DT $\{hk0\}$ Bipirámides T $\{h0l\}$, $\{hhl\}$	Bipirámide DT $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}hl)(k\bar{h}l)$ $(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(khl)(\bar{k}hl)$ $(\bar{h}\bar{k}l)(hkl)(\bar{k}hl)(khl)$ $(h\bar{k}l)(\bar{h}kl)(\bar{k}hl)(khl)$	

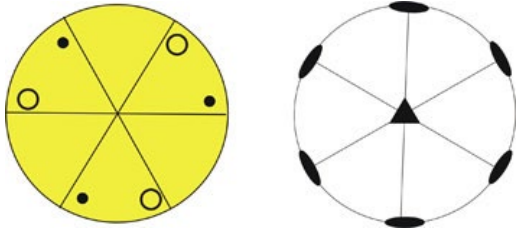
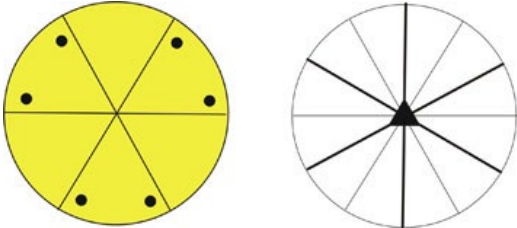
Tabla 4.19

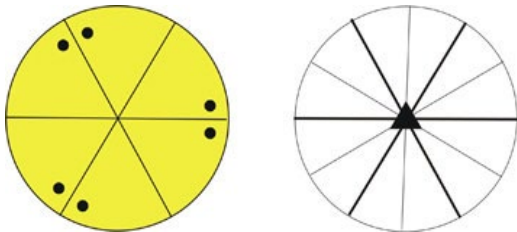
SISTEMA CRISTALINO ROMBOÉDRICO

R = romboédrico o trigonal; H = hexagonal; DT = ditrigonal; DH = dihexagonal Se usan índices hexagonales $(hki l)$

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Piramidal Tetartoédrica (Tetartoedría)	3	Pedión (0001) o $(000\bar{1})$ Prisma R $\{hki0\}$	Pirámide R $(hki l)(ihkl)(kihl)$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Romboédrica (Hemiedría enantiomórfica)	$\bar{3}$	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma H $\{hki0\}$	Romboedro $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	
Trapezoédrica (Hemiedría enantiomórfica)	321	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma H $\{10\bar{1}0\}$ Prisma R $\{11\bar{2}0\}$ o $\{\bar{1}\bar{1}20\}$ Prisma DT $\{hki0\}$ Romboedro $\{h0\bar{h}l\}$ Bipirámide R $\{hh\bar{2}hl\}$	Trapezoedro R $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(kh\bar{l})(hik\bar{l})(ikh\bar{l})$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Trapezoédrica (Hemiedría enantiomórfica)	312	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma H $\{10\bar{1}0\}$ Prisma R $\{11\bar{2}0\}$ o $\{\bar{1}\bar{1}20\}$ Prisma DT $\{hki0\}$ Romboedro $\{h0\bar{h}l\}$ Bipirámide R $\{hh2hl\}$	Trapezoedro R $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$	
Ditrigonal piramidal (Hemiedría hemimórfica)	3m1	Pedión (0001) o $(000\bar{1})$ Prisma R $\{10\bar{1}0\}$ o $\{\bar{1}010\}$ Prisma H $\{11\bar{2}0\}$ Prisma DT $\{hki0\}$	Pirámide DT $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
		Pirámide R $\{h0\bar{h}l\}$ Pirámide H $\{hh\bar{2}hl\}$		
Ditrigonal piramidal (Hemiedría hemimórfica)	$31m$	Pedión (0001) o $(000\bar{1})$ Prisma R $\{11\bar{2}0\}$ o $\{11\bar{2}0\}$ Prisma H $\{10\bar{1}0\}$ o $\{01\bar{1}0\}$ Prisma DT $\{hki0\}$ Pirámide R $\{hh\bar{2}hl\}$ Pirámide H $\{h0\bar{h}l\}$	Pirámide DT $(hkil)(ihkl)(kihl)$ $(khil)(hikl)(ikhl)$	

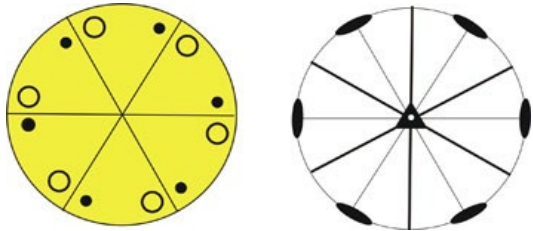
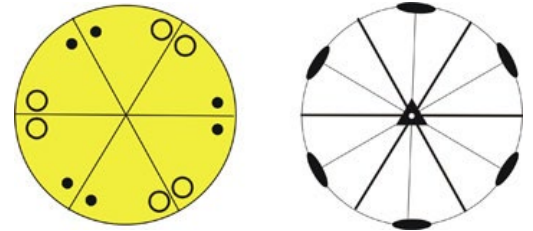
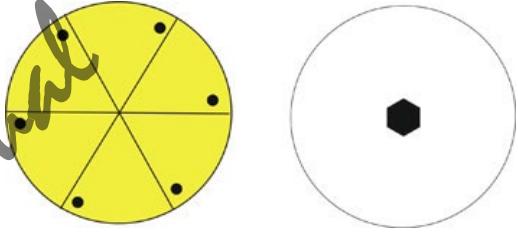
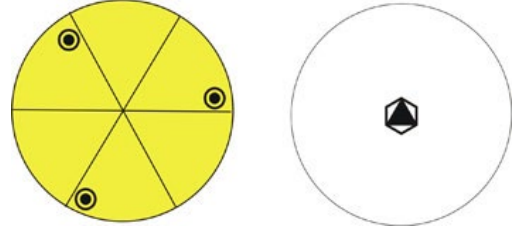
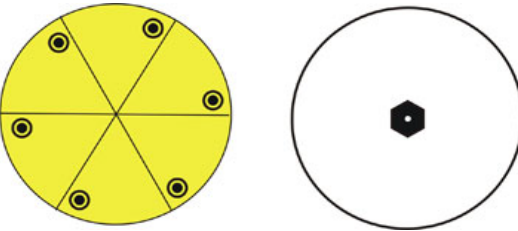
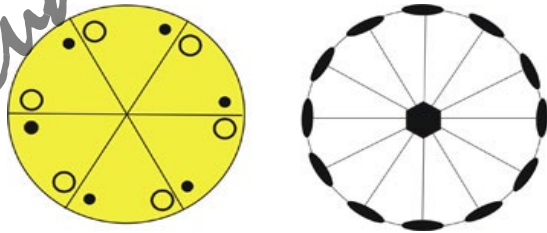
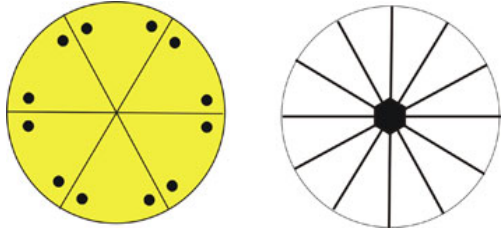
CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Ditrigonal escalenoédrica (holoedría)	$\bar{3}m1$ o $\bar{3}2/m1$	Pinacoide $\{0001\}$ Prismas H $\{10\bar{1}0\}, \{11\bar{2}0\}$ Prisma DH $\{hki0\}$ Bipirámide H $\{hh\bar{2}hl\}$ Romboedro $\{h0\bar{h}l\}$	Escalenoedro DT $(hki\bar{l})(ihkl)(kihl)$ $(khi\bar{l})(hikl)(ikh\bar{l})$ $(\bar{h}k\bar{i}\bar{l})(\bar{i}h\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$ $(\bar{k}h\bar{i}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$	
Ditrigonal escalenoédrica (holoedría)	$\bar{3}1m$ o $\bar{3}12/m1$	Pinacoide $\{0001\}$ Prismas H $\{10\bar{1}0\}, \{11\bar{2}0\}$ Prisma DH $\{hki0\}$ Bipirámide H $\{h0\bar{h}l\}$ Romboedro $\{hh\bar{2}hl\}$	$(hki\bar{l})(ihkl)(kihl)$ $(khi\bar{l})(hikl)(ikh\bar{l})$ $(\bar{h}k\bar{i}\bar{l})(\bar{i}h\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$ $(\bar{k}h\bar{i}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$	

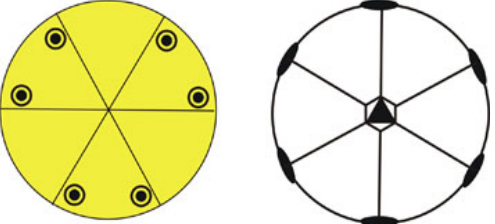
Tabla 4.20

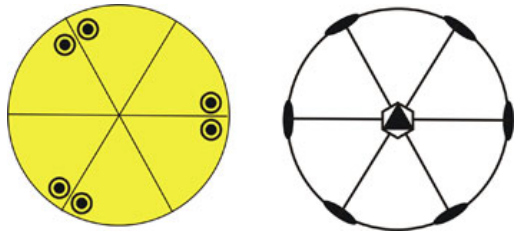
SISTEMA CRISTALINO HEXAGONAL

R=romboédrico o trigonal; H=hexagonal; DT=ditrigonal; DH=dihexagonal. Se usan índices hexagonales (hkl).

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Piramidal (Tetartoedría)	6	Pediones $\{0001\}$ o $\{000\bar{1}\}$ Prismas H $\{hki0\}$	Pirámide H $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	
Trigonal bipiramidal (Tetartoedría con inversión)	$\bar{6}$	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma R $\{hki0\}$	Bipirámide R $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(h\bar{k}\bar{l})(i\bar{h}\bar{k}\bar{l})(k\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	
Hexagonal bipiramidal (Hemiedría paramórfica)	$6/m$	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma H $\{hki0\}$	Bipirámide H $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(h\bar{k}\bar{l})(i\bar{h}\bar{k}\bar{l})(k\bar{i}\bar{h}\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Trapezoédrica (Hemiedría enantiomórfica)	622	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma H $\{10\bar{1}0\}$ Prisma DH $\{hki0\}$ Prismas H $\{hki0\}, \{11\bar{2}0\}$ Bipirámides H $\{h0\bar{h}l\},$ $\{hh\bar{2}hl\}$	Trapezoedro H $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(khl)(hikl)(ikh\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	
Dihexagonal piramidal (Hemiedría hemimórfica)	6mm	Pedión $\{0001\}$ o $\{000\bar{1}\}$ Prismas H $\{10\bar{1}0\},$ $\{11\bar{2}0\}$ Prisma DH	Pirámide DH $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(khl)(hikl)(ikh\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{k}\bar{h}\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{k}\bar{i}\bar{h}\bar{l})$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
		$\{hki0\}$ Pirámide DH $\{hkil\}$ Pirámides H $\{h0\bar{h}l\}$, $\{hh2\bar{h}l\}$		
Ditrigonal bipiramidal (Hemiedría con inversión)	$\bar{6}m2$	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma R $\{10\bar{1}0\}$ o $\{\bar{1}010\}$ Prisma H $\{1120\}$ Prisma DT $\{hki0\}$ Bipirámide R $\{h0\bar{h}l\}$	Bipirámide DT $(hki\bar{l})(ihkl)(kihl)$ $(hki\bar{l})(ihk\bar{l})(kih\bar{l})$ $(\bar{k}h\bar{i}l)(\bar{h}i\bar{k}l)(\bar{i}k\bar{h}l)$ $(\bar{k}h\bar{i}l)(\bar{h}i\bar{k}l)(\bar{i}k\bar{h}l)$	

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
		Bipirámide H $\{hh\bar{2}hl\}$		
Ditrigonal bipiramidal (Hemiedría con inversión)	$\bar{6}2m$	Pinacoide $\{0001\}$ Prisma R $\{10\bar{1}0\}$ o $\{\bar{1}010\}$ Prisma H $\{11\bar{2}0\}$ Prisma DT $\{hki0\}$ Bipirámide R $\{h0hl\}$ Bipirámide H $\{hh\bar{2}hl\}$	Bipirámide DT $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(hkl)(ihkl)(kih\bar{l})$ $(\bar{k}h\bar{l})(\bar{h}i\bar{k}l)(\bar{i}k\bar{h}l)$ $(\bar{k}h\bar{l})(\bar{h}i\bar{k}\bar{l})(\bar{i}k\bar{h}\bar{l})$	

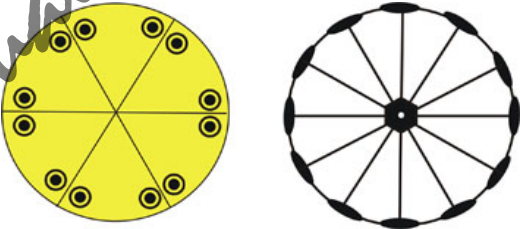
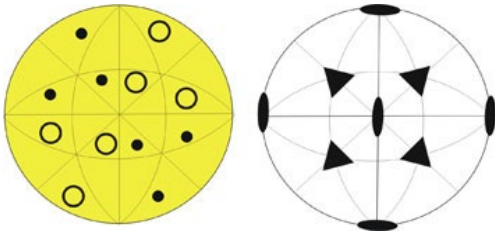
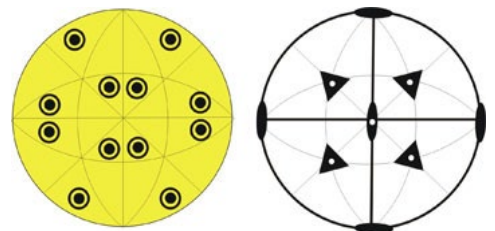
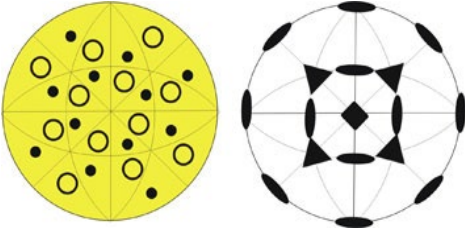
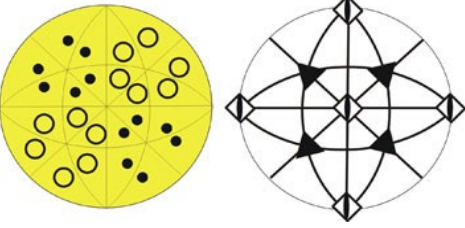
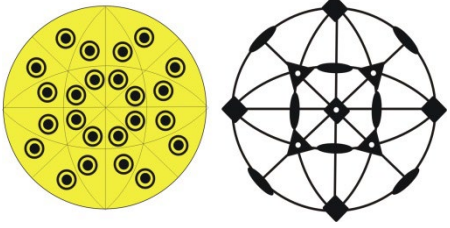
CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
Dihexagonal bipiramidal (Holoedría)	$6/mmm$ o $6/m2/m2/m$	Pinacoide $\{0001\}$ Prismas H $\{10\bar{1}0\}$, $\{11\bar{2}0\}$ Prisma DH $\{hki0\}$ Bipirámides H $\{h0\bar{h}l\}$, $\{hh\bar{2}hl\}$	Bipirámides DH $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(hkl)(ihk\bar{l})(kih\bar{l})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}\bar{i}\bar{h}l)$ $(\bar{k}\bar{h}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}l)(\bar{i}\bar{k}\bar{h}l)$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(\bar{i}\bar{h}\bar{k}l)(\bar{k}\bar{i}\bar{h}l)$ $(\bar{k}\bar{h}\bar{l})(\bar{h}\bar{i}\bar{k}l)(\bar{i}\bar{k}\bar{h}l)$ $(hkl)(ihkl)(kihl)$ $(khl)(hikl)(ikh\bar{l})$	

Tabla 4.21

SISTEMA CRISTALINO CÚBICO

CLASE	GRUPO PUNTUAL	FORMAS ESPECIALES	FORMAS GENERALES	PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA
-------	---------------	-------------------	------------------	---------------------------

Dodecaédrica pentagonal Tetraédrica (tetartoédrica) Tetartoédrica	23	Cubo $\{100\}$ Rombododecaedro $\{110\}$ Dodecaedro pentagonal (piritoedro) $\{0kl\}$ Tetraedros $\{111\}$ ó $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ Tristetraedro $\{hhl\}$ $h < l$ Dodecaedro deltoide (deltoedro) $\{hhl\}$ $h > l$	Tetartoide (dodecaedro pentagonal tetraédrico) $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}k\bar{l})(h\bar{k}\bar{l})(lhk)(l\bar{h}k)$ $(\bar{l}hk)(\bar{l}h\bar{k})(klh)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}l\bar{h})$	
Disdodecaédrica (Hemiedría paramórfica)	$m\bar{3}$	Cubo $\{100\}$ Rombododecaedro $\{110\}$ Dodecaedro pentagonal (piritoedro) $\{0kl\}$ Octaedro $\{111\}$ Icositetraedro deltoide (trapezoedro) $\{hhl\}$ $h < l$ Trisoctaedro $\{hhl\}$ $h > l$	Disdodecaedro $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}k\bar{l})(h\bar{k}\bar{l})(lhk)(l\bar{h}k)$ $(\bar{l}hk)(\bar{l}h\bar{k})(klh)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}l\bar{h})$ $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})(hkl)(h\bar{k}l)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{l}hk)(\bar{l}h\bar{k})$ $(lhk)(l\bar{h}k)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}l\bar{h})(\bar{k}l\bar{h})$	

Icositetráedrica pentagonal (Hemiedría enantiomórfica)	432	Cubo $\{100\}$ Rombododecaedro $\{110\}$ Tetraquishexaedro $\{0kl\}$ Octaedro $\{111\}$ Icositetraedro deltoide (trapezoedro) $\{hhl\} h < l$ Trisocetraedro $\{hhl\} h > l$	Giroedro (icositetraedro pentagonal) $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(lhk)(l\bar{h}\bar{k})$ $(\bar{l}\bar{h}k)(\bar{l}h\bar{k})(klh)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}\bar{l}h)$ $(khl)(\bar{k}\bar{h}l)(\bar{k}hl)(\bar{k}hl)(lkh)(l\bar{k}h)$ $(lk\bar{h})(l\bar{k}h)(h\bar{l}k)(\bar{h}l\bar{k})(\bar{h}lk)(h\bar{l}k)$	
Hexaquis- tetraédrica (Hemiedría hemimórfica)	$\bar{4}3m$	Cubo $\{100\}$ Rombododecaedro $\{110\}$ Tetraquishexaedro $\{hk0\}$ Tetraedros $\{111\}$ ó $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ Tristetraedro $\{hhl\} h < l$ Dodecaedro deltoide $\{hhl\} h > l$	Hexaquistetraedro $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(lhk)(l\bar{h}\bar{k})$ $(\bar{l}\bar{h}k)(\bar{l}h\bar{k})(klh)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}\bar{l}h)$ $(khl)(\bar{k}\bar{h}l)(\bar{k}hl)(\bar{k}hl)(lkh)(l\bar{k}h)$ $(lk\bar{h})(l\bar{k}h)(h\bar{l}k)(\bar{h}l\bar{k})(\bar{h}lk)(h\bar{l}k)$	
Hexaquis- octaédrica (Holoedría)	$m\bar{3}m$ $4/m\bar{3}2/m$	Cubo $\{100\}$ Rombododecaedro $\{110\}$ Tetraquishexaedro $\{0kl\}$ Octaedro $\{111\}$	Hexaquisoctaedro $(hkl)(\bar{h}\bar{k}l)(\bar{h}kl)(h\bar{k}l)(lhk)(l\bar{h}\bar{k})$ $(\bar{l}\bar{h}k)(\bar{l}h\bar{k})(klh)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}\bar{l}h)$ $(\bar{h}\bar{k}l)(hkl)(h\bar{k}l)(\bar{h}kl)(\bar{l}\bar{h}k)(l\bar{h}\bar{k})$ $(lh\bar{k})(l\bar{h}k)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)(\bar{k}l\bar{h})(k\bar{l}h)$	

		Icositetraedro deltoide (trapezoedro) $\{hhl\}h < l$ trisoedraedro $\{hhl\}h > l$	$(kh\bar{l})(\bar{k}h\bar{l})(\bar{k}hl)(\bar{k}hl)(\bar{l}kh)(\bar{l}k\bar{h})$ $(lk\bar{h})(l\bar{k}h)(h\bar{l}k)(\bar{h}\bar{l}\bar{k})(\bar{h}lk)(h\bar{l}\bar{k})$ $(\bar{k}hl)(khl)(\bar{k}hl)(\bar{k}hl)(\bar{l}k\bar{h})(lk\bar{h})$ $(\bar{l}k\bar{h})(\bar{l}k\bar{h})(\bar{h}\bar{l}\bar{k})(h\bar{l}k)(h\bar{l}\bar{k})(\bar{h}\bar{l}k)$	
--	--	---	--	--

Tabla 4.22

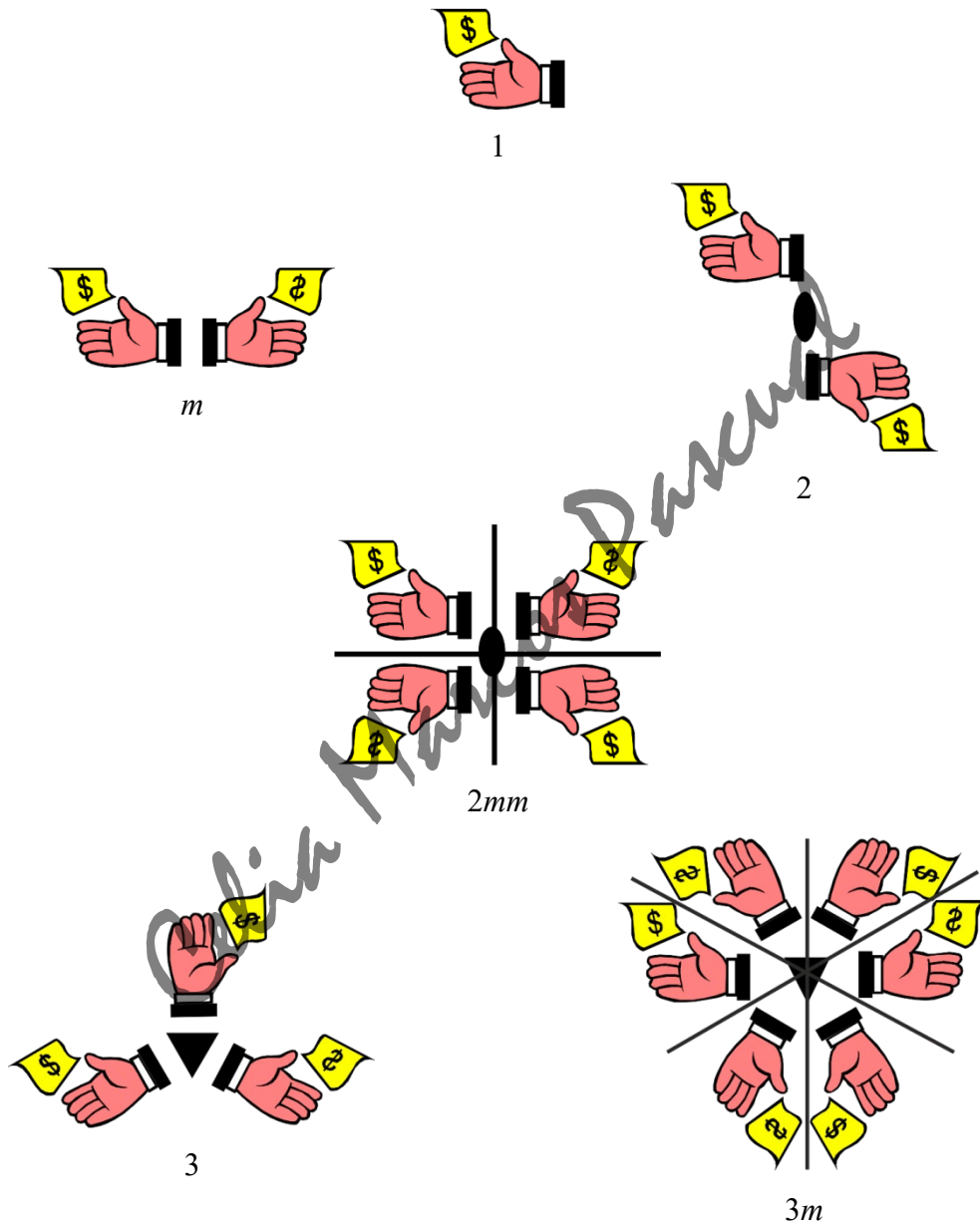
Celia Marcos Pascual

4.7 GRUPOS PUNTUALES PLANOS y GRUPOS PUNTUALES DE LAS REDES PLANAS

Son los grupos puntuales bidimensionales y son 10:

1, m , 2, $2mm$, 3, $3m$, 4, $4mm$, 6 y $6mm$

Una representación de ellos puede verse en la Tabla 4.23



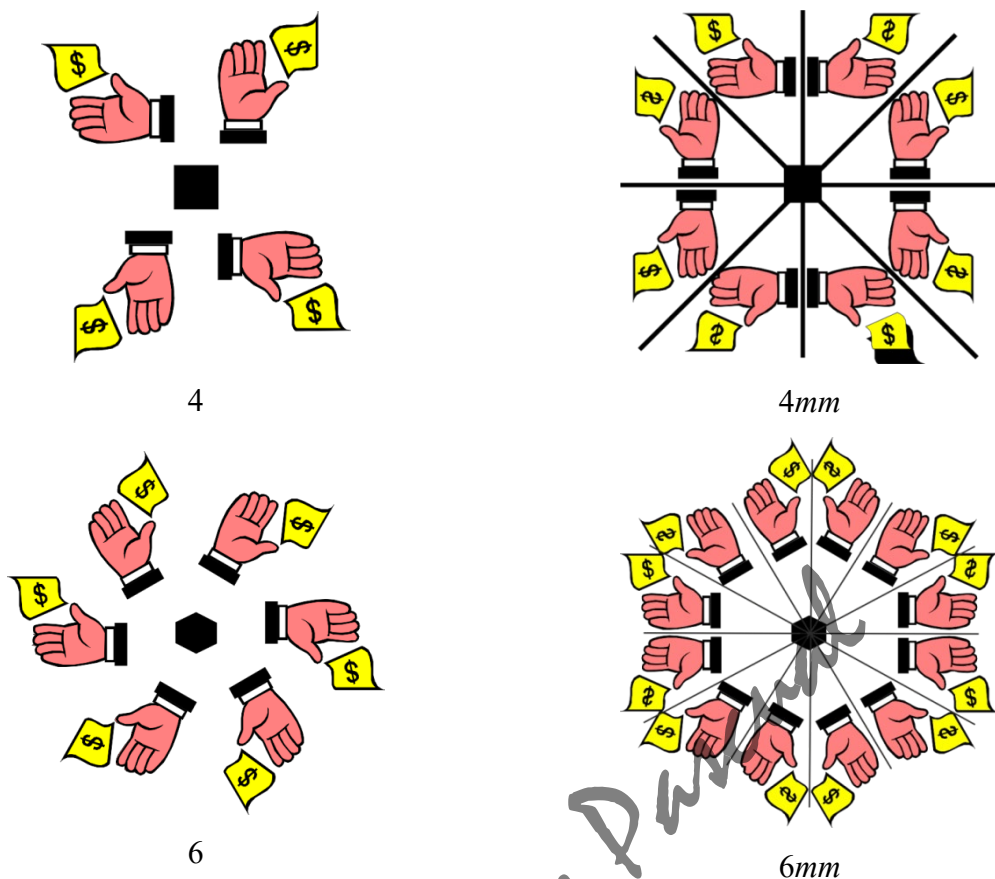


Tabla 4.23

Los grupos puntuales que caracterizan a las redes planas son los siguientes:

- Red oblicua 2
- Red rectangular $2mm$
- Red rómbica $2mm$
- Red cuadrada $4mm$
- Red hexagonal $6mm$

4.8 GRUPOS PUNTUALES TRIDIMENSIONALES y GRUPOS PUNTUALES DE LAS REDES TRIDIMENSIONALES

- Son 32.
- Su símbolo (ver Cuadro 4.3), de acuerdo a la notación internacional, se obtiene teniendo en cuenta las direcciones de simetría de las redes.
- Los grupos puntuales que caracterizan a las redes tridimensionales son los siguientes:

Tipo de red	Grupo puntual holoédrico
-------------	--------------------------

Tipo de red	Grupo puntual holoédrico
Triclínica	$\bar{1}$
Monoclínica	$2/m$
Rómbica	mmm
Romboédrica	$\bar{3}m$
Hexagonal	$6/mmm$
Tetragonal	$4/mmm$
Cúbica	$m\bar{3}m$

Tabla 4.24

4.9 FORMA CRISTALINA

- Es el conjunto de caras equivalentes por simetría.
 - Su símbolo es $\{hkl\}$
 - La morfología que presenta un material en estado cristalino se refiere a las formas generadas por procesos naturales.
 - El número, aspecto y distribución de las caras de un cristal está gobernada por la simetría del cristal.
 - Las formas cristalinas pueden ser:
 - Abiertas: no limitan un espacio

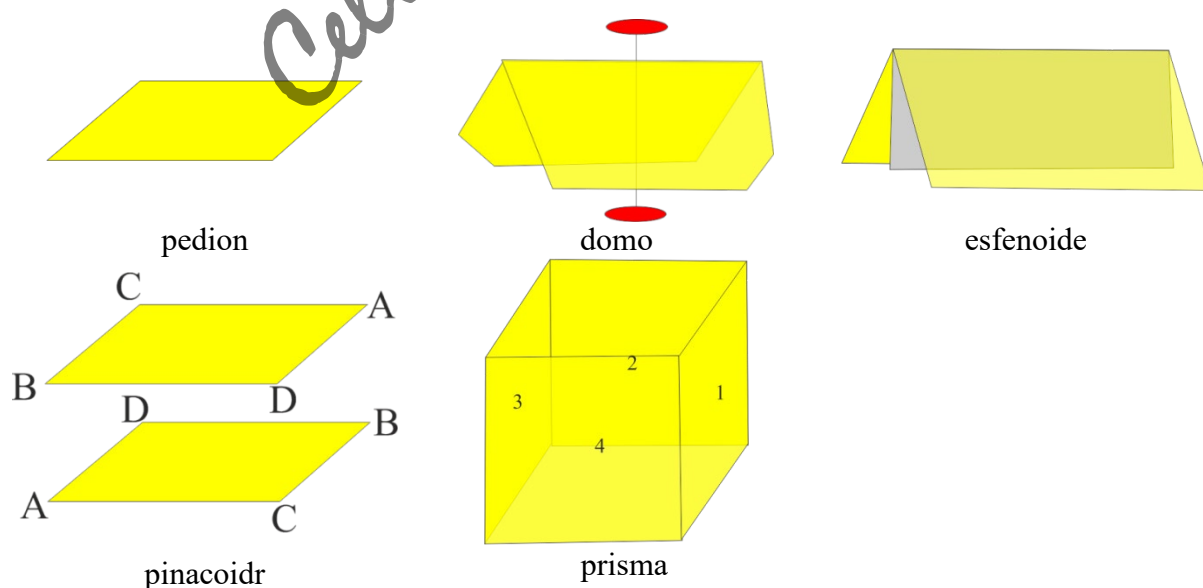
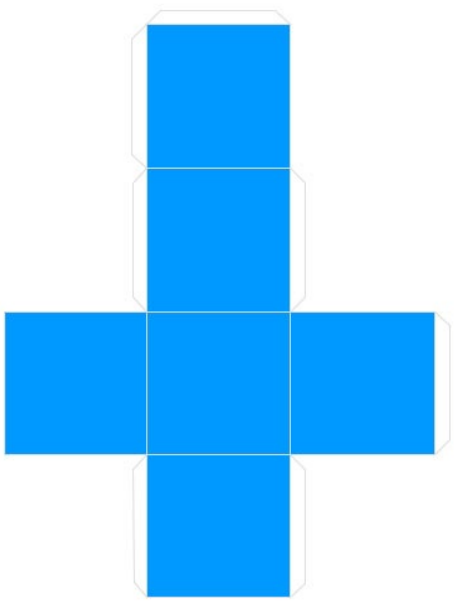
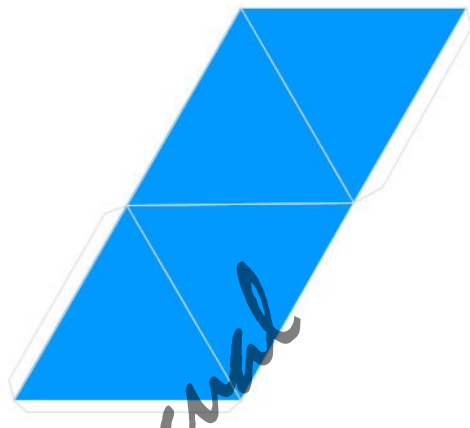
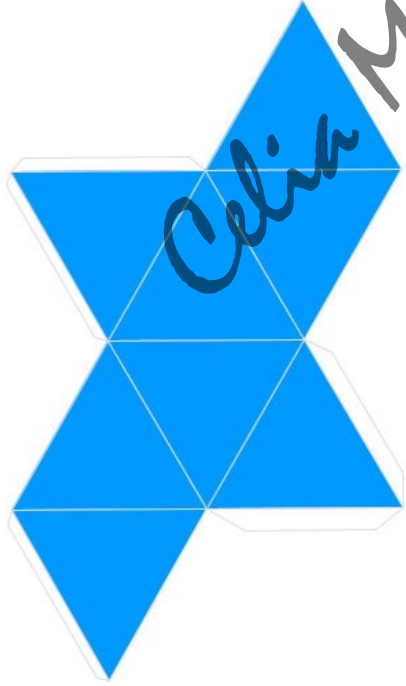
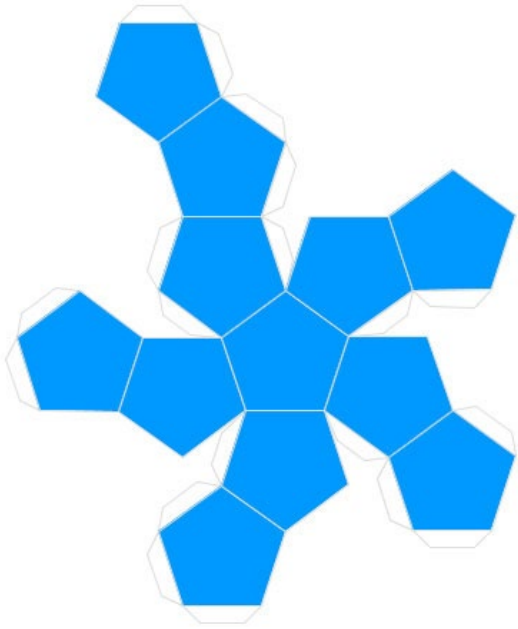


Figura 4.6.- Formas cristalinas abiertas

- Cerradas: limitan un espacio
- Simples: constituidas por una sola forma
- Compuestas: constituidas por varias formas
- Modelos de formas cristalinas para realizar en papel se puede observar en la Tabla 4.25:

 cubo	 tetraedro
 octaedro	

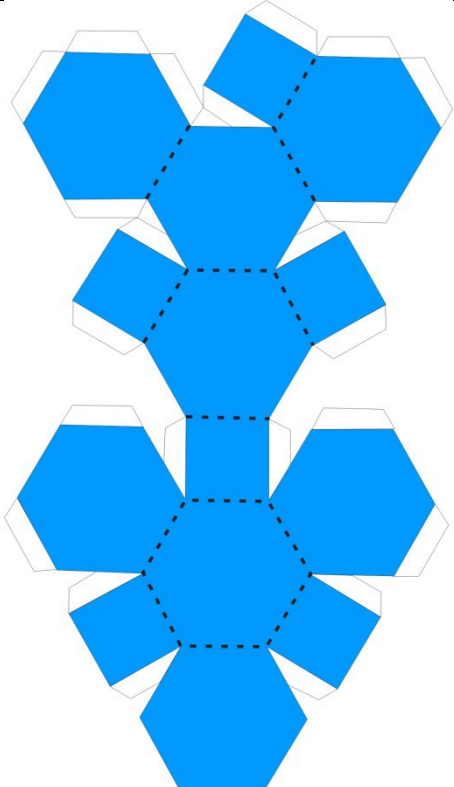
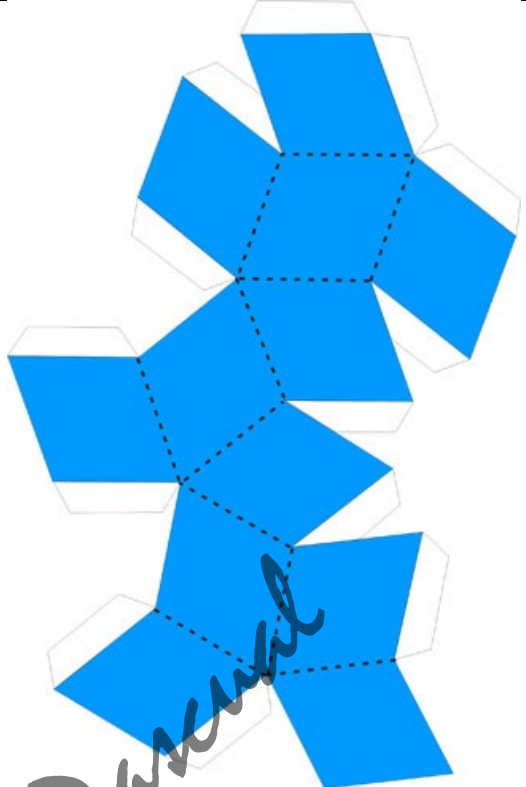
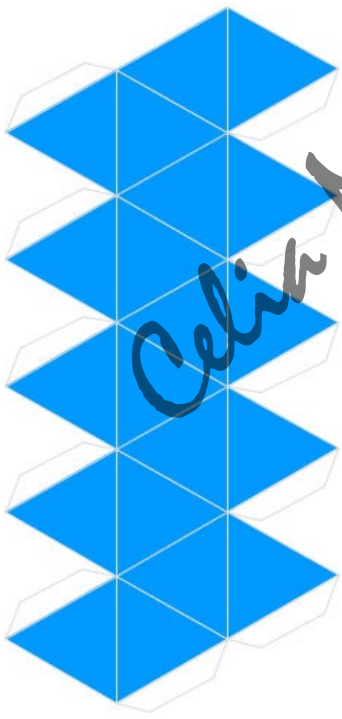
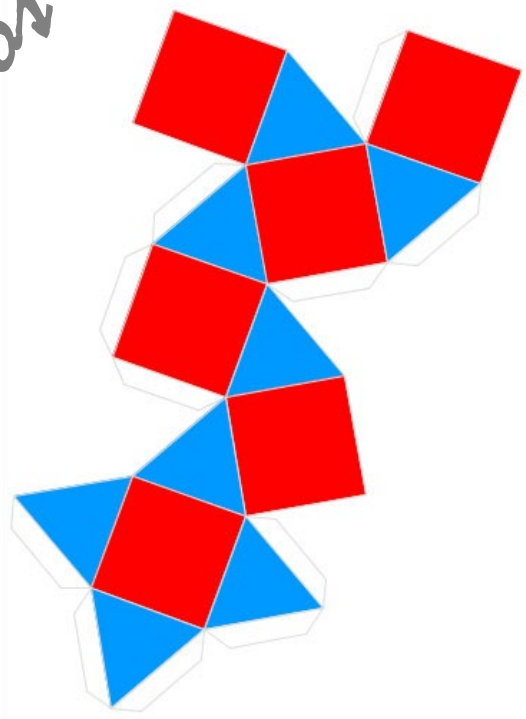
 octaedro-truncado	 rombododecaedro
 icosaedro	 cubo-octaedro

Tabla 4.25

La **multiplicidad** es el número de caras generadas por los elementos de simetría. Se dice que una cara está en posición general cuando no está situada sobre ningún elemento de simetría (Figura 4.7).

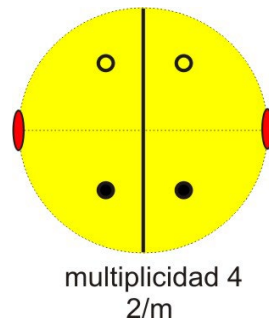


Figura 4.7

Se dice que una cara está en posición especial o particular cuando está situada sobre algún elemento de simetría (Figura 4.8).

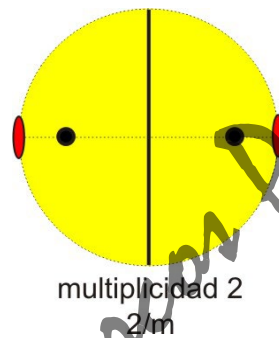


Figura 4.8

4.10 ZONA Y EJE DE ZONA

- Una zona se define como el conjunto de planos cristalinos con una dirección cristalográfica común, denominada eje de zona.
- Un eje de zona es la dirección cristalográfica común a una serie de planos cristalinos.
 - Su símbolo es $[uvw]$ y se obtiene en la forma expuesta en el apartado 13 del Tema 2.

4.11 HAZ DE NORMALES

- Es el conjunto de normales trazadas desde el origen de coordenadas a diferentes caras cristalinas.
 - Se caracteriza porque contiene los ángulos entre las caras.

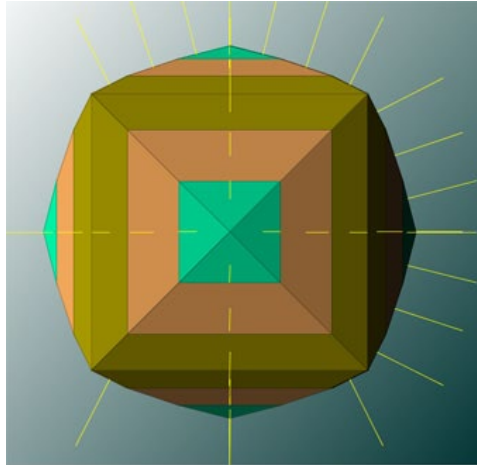


Figura 4.9

4.12 PROYECCIONES CRISTALOGRÁFICAS: Proyección esférica

ESFERA DE POLOS

Es la proyección en tres dimensiones del haz de normales a las caras y de los elementos de simetría. La proyección de una normal a una cara en la esfera de polos es un punto al que se denomina polo. En la Figura 4.10 pueden observarse los polos (puntos en rojo) de las caras del cristal inscrito en la esfera de polos.

- Se conservan:
 - Los ángulos entre las caras
 - Las zonas (en la Figura 4.11 son los círculos máximos que unen los polos de las caras que tienen una dirección común)
 - Los ángulos entre las aristas

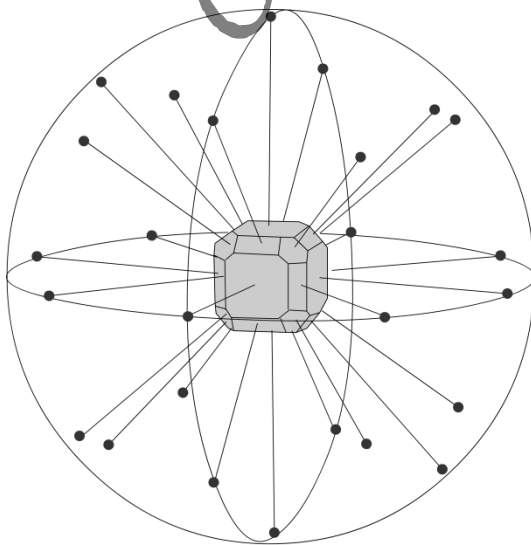


Figura 4.10

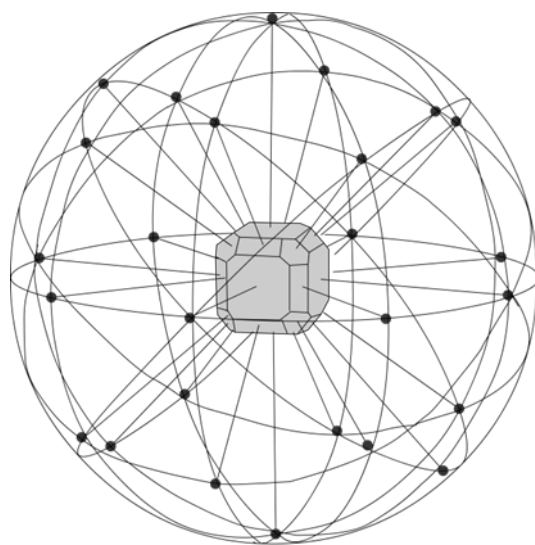
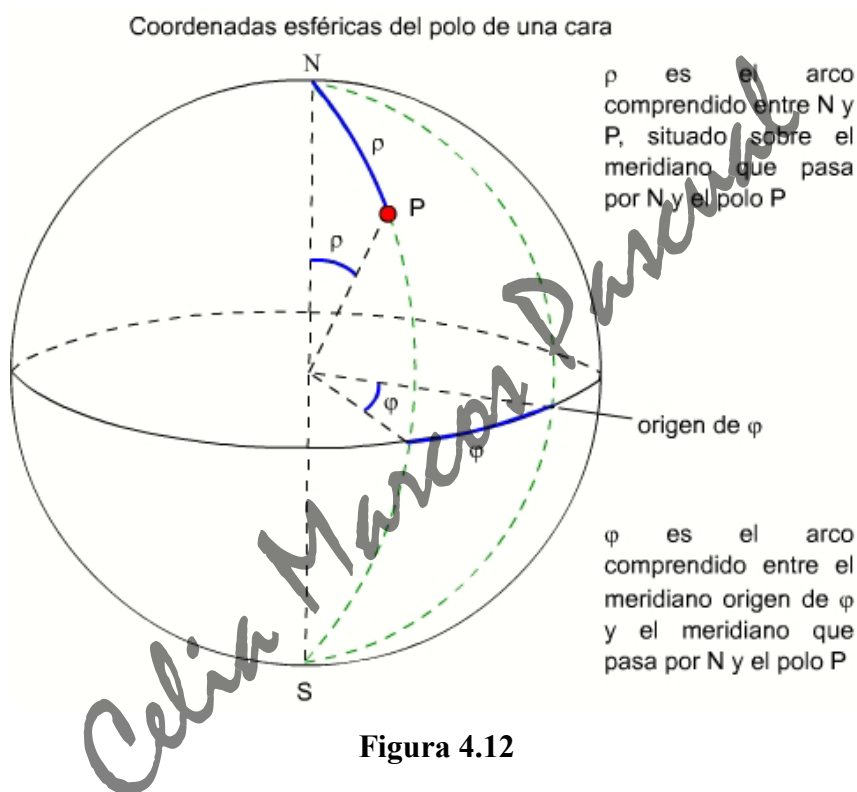


Figura 4.11

COORDENADAS ESFÉRICAS DE UN POLO

- Son las coordenadas que determinan la posición de un polo en la esfera de polos. Son φ y ρ .
 - El ángulo φ es la distancia entre dos meridianos:
 - El que se toma como origen de coordenadas y pasa por el polo N
 - El que pasa por el polo N, el polo S y el polo de la cara
 - El ángulo ρ es el arco comprendido entre el punto N y el polo P, trazado sobre el meridiano que pasa por N, P y S



4.13 PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

- Es una proyección en dos dimensiones en la que se proyectan los elementos de simetría y el haz de normales a las caras de un cristal.
 - El plano de proyección que se suele utilizar es el ecuatorial.
 - El punto de vista es:
 - el polo sur para los polos del hemisferio superior de la esfera polar
 - el polo norte para los polos del hemisferio inferior de la esfera polar.
 - Se conserva el ángulo φ pero no el ρ , cuyo valor es:

$$\rho_{\text{proyección}} = R \tan(\rho/2)$$

Ecuación 4.1

Proyección estereográfica del polo de una cara

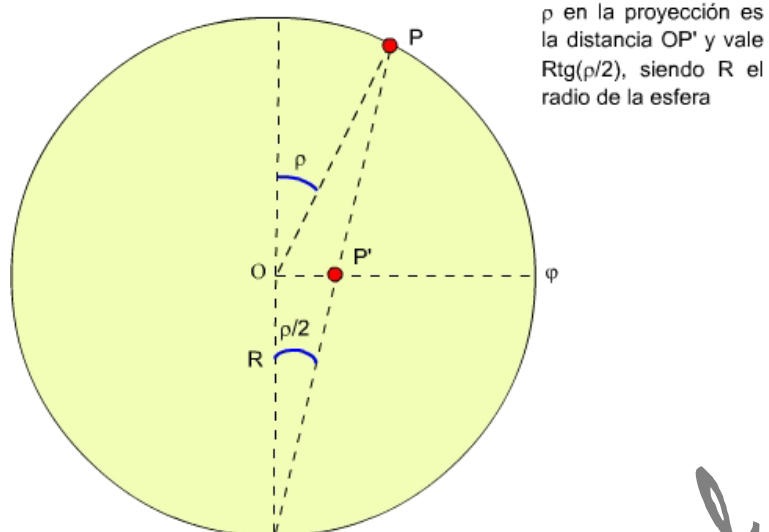
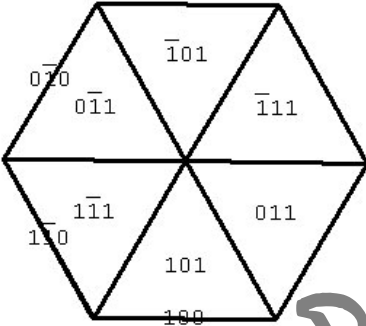
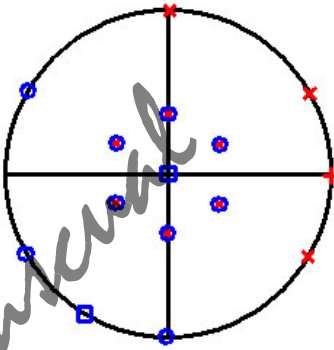
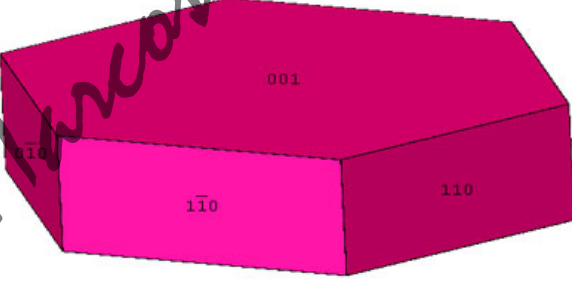
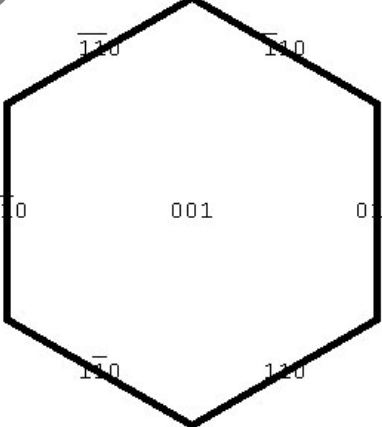
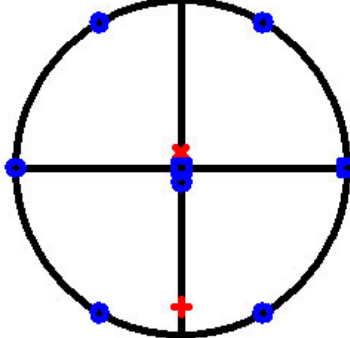
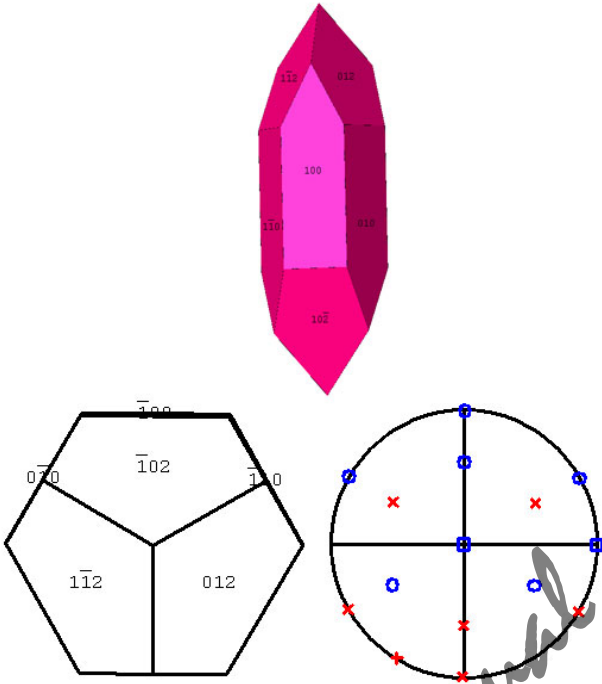
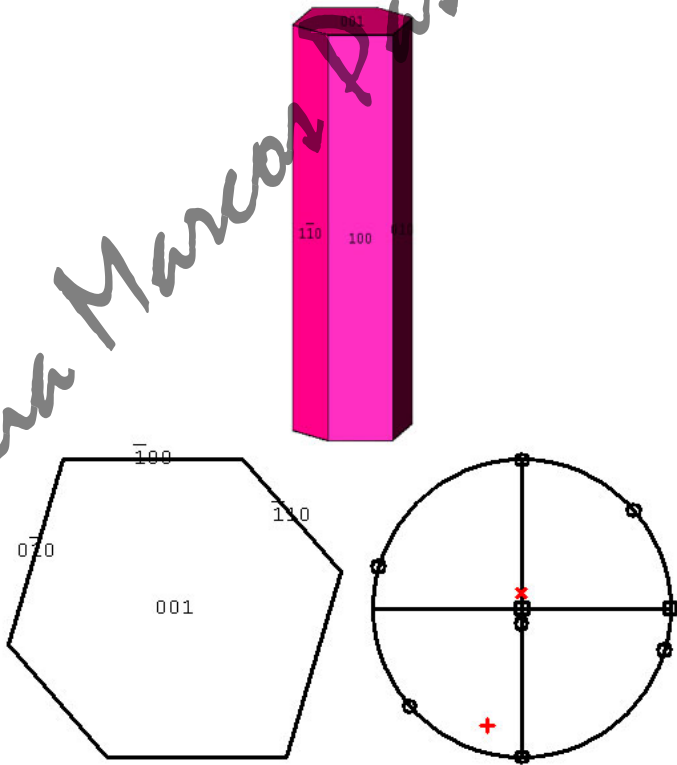


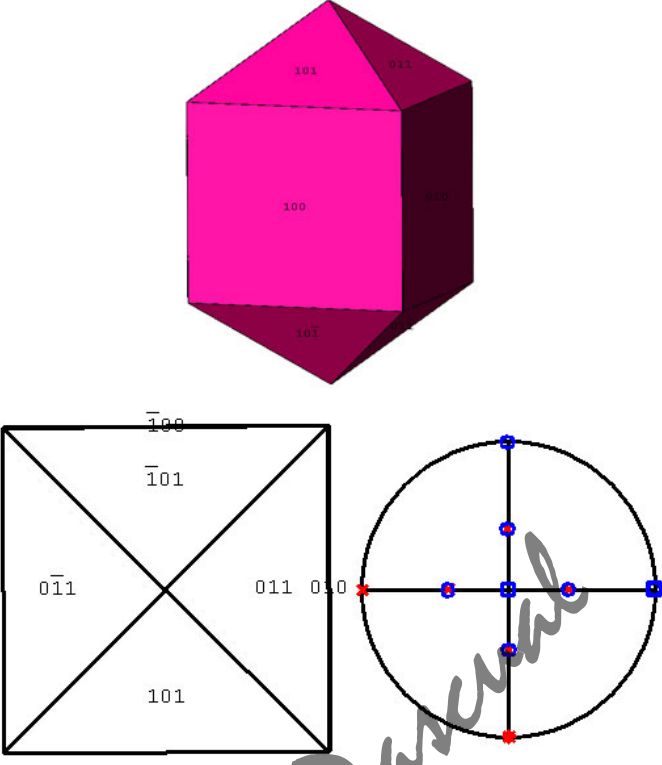
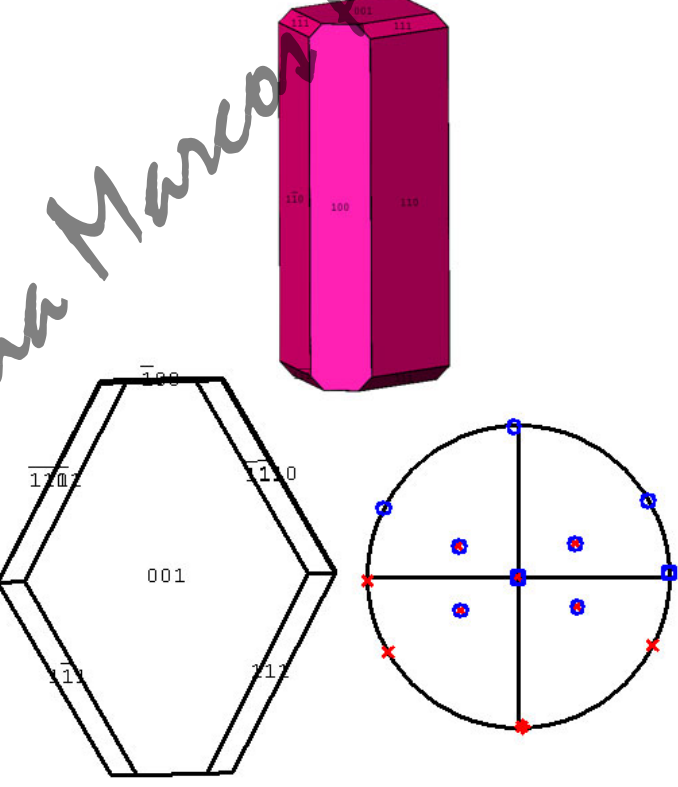
Figura 4.13

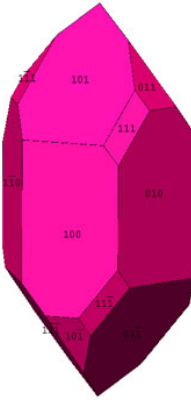
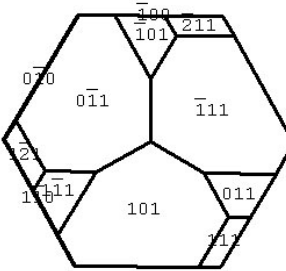
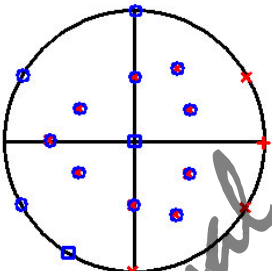
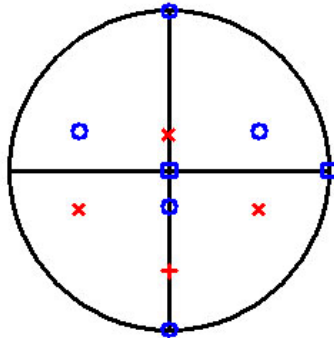
Ejemplos de proyecciones estereográficas pueden observarse en la Tabla 4.26

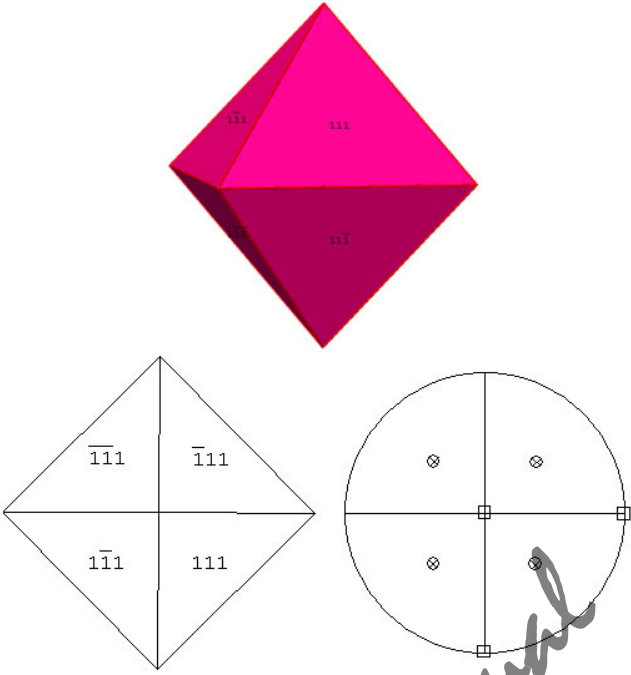
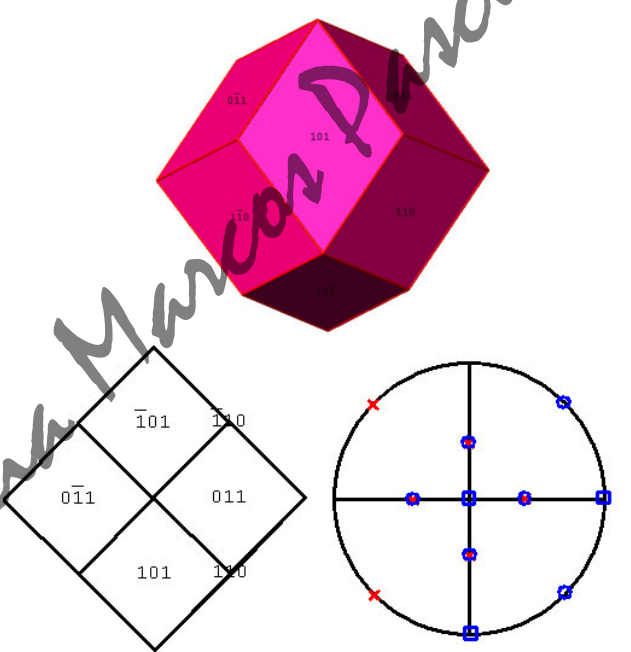
	Figuras
andalucita	

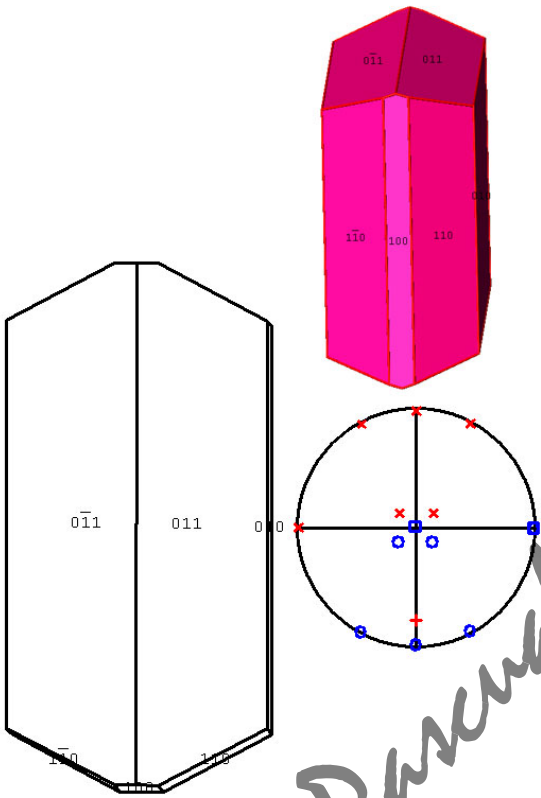
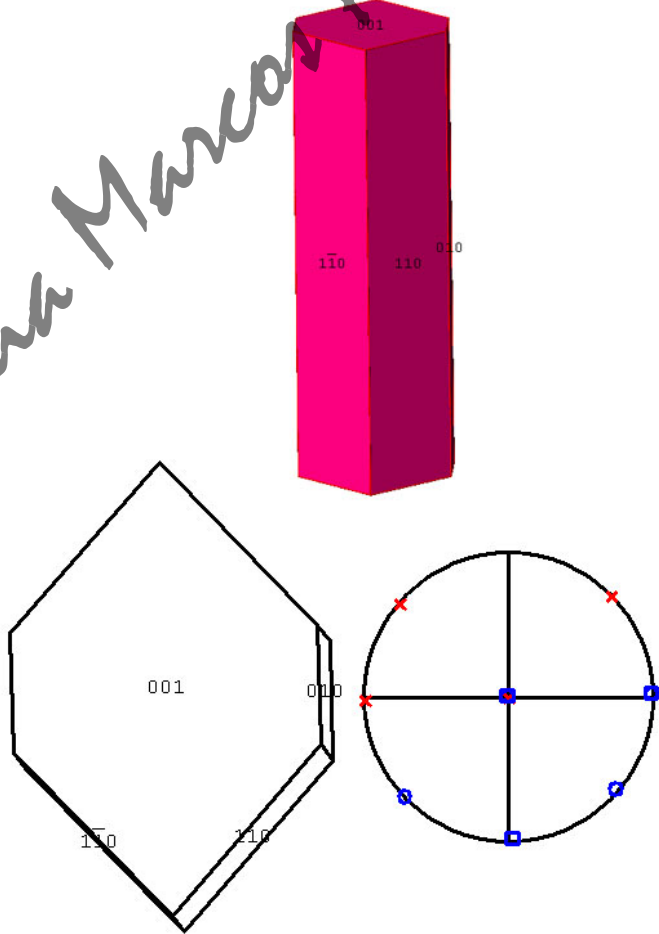
apatito	  
biotita	  

calcita	 The calcite section displays a rhombohedral crystal habit. The face diagram is a hexagon with faces labeled $\bar{1}00$, $0\bar{1}0$, 100, $11\bar{2}$, 012, and $\bar{1}\bar{1}2$. The stereonet shows crystallographic poles as blue circles and red crosses on a circular projection with a crosshair.
cianita	 The cyanite section displays a prismatic crystal habit. The face diagram is a hexagon with faces labeled $\bar{1}00$, $0\bar{1}0$, 100, 110, 001, and $\bar{1}\bar{1}0$. The stereonet shows crystallographic poles as black circles and red crosses on a circular projection with a crosshair.

circón	
cordierita	

cuarzo	  
epidota	  

fluorita	
granate piropo	

hornblenda	
sillimanita	

4.14 PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA DE LOS EJES CRISTALOGRÁFICOS, LAS ZONAS Y POLOS DE LAS CARAS FUNDAMENTALES DE LOS DISTINTOS SISTEMAS CRISTALINOS

- Cúbico, tetragonal, rómbico (ortogonales)

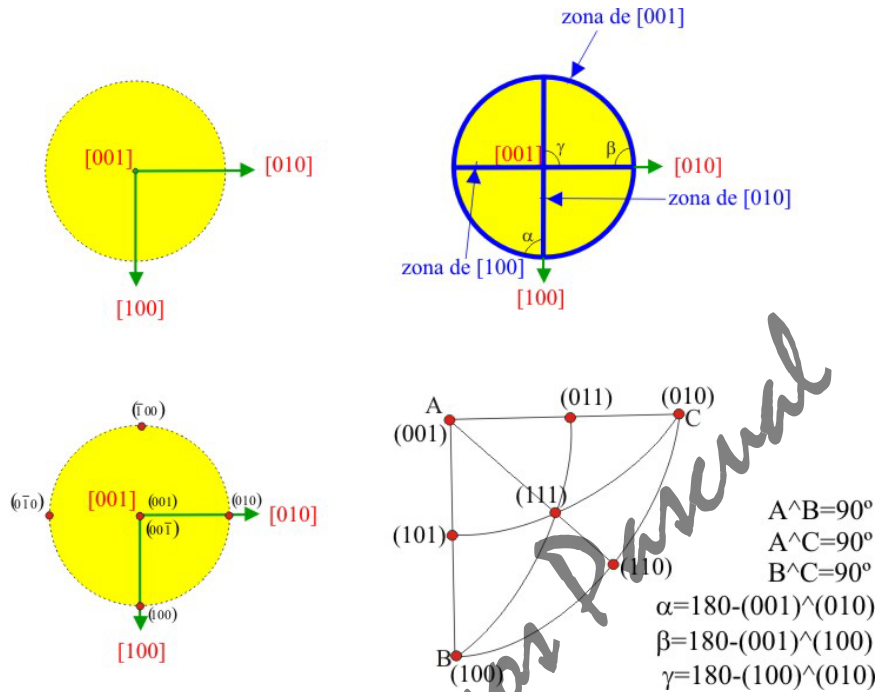


Figura 4.14

- Romboédrico y hexagonal

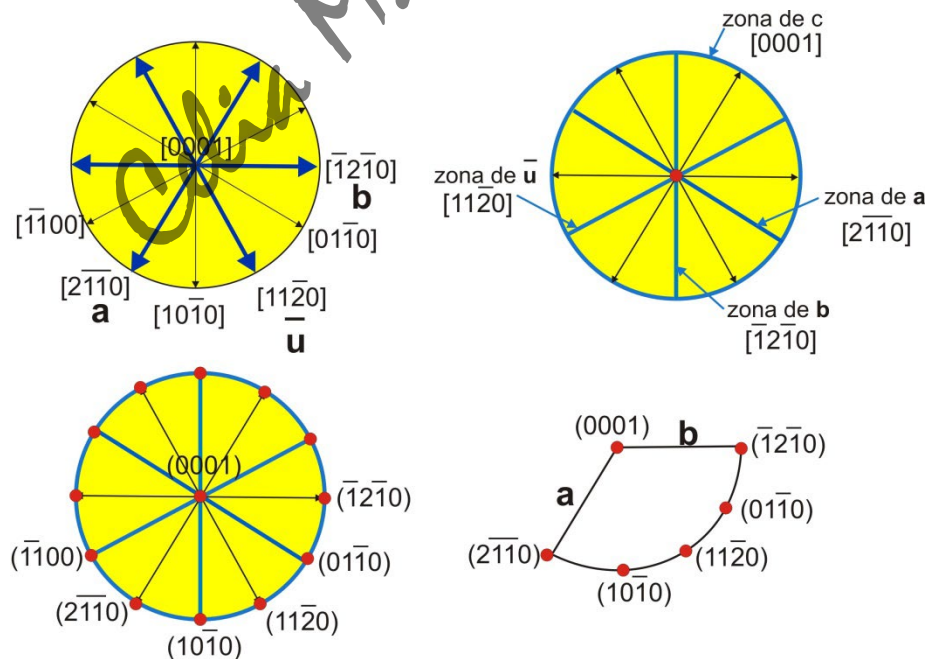


Figura 4.15

- Monoclínico

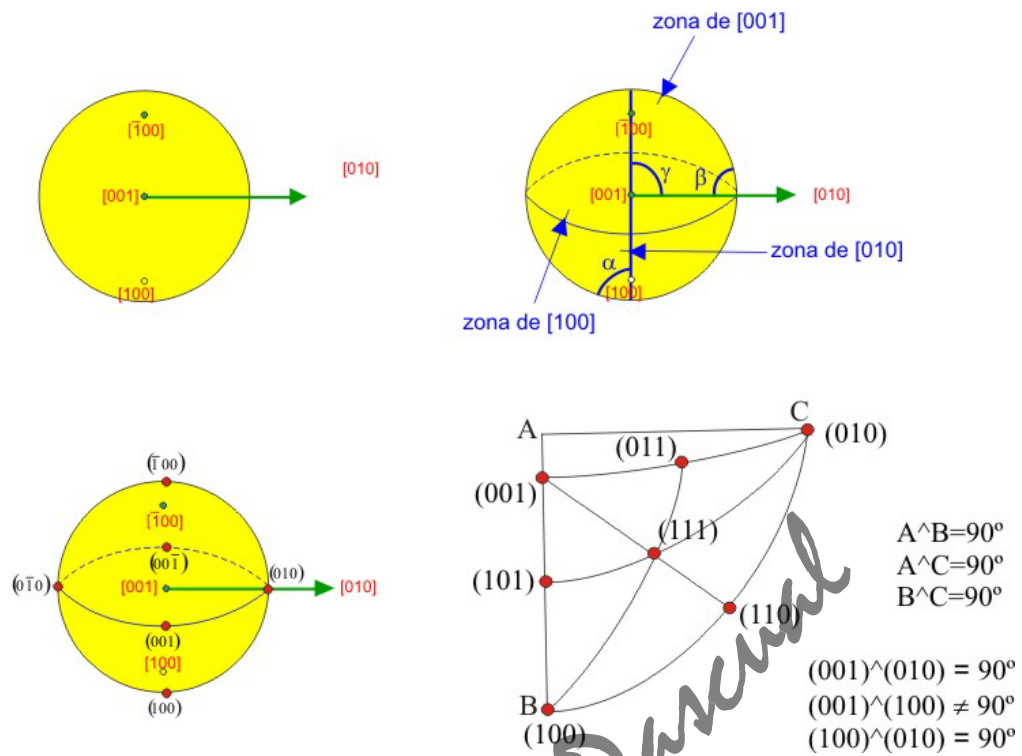


Figura 4.16

- Triclínico

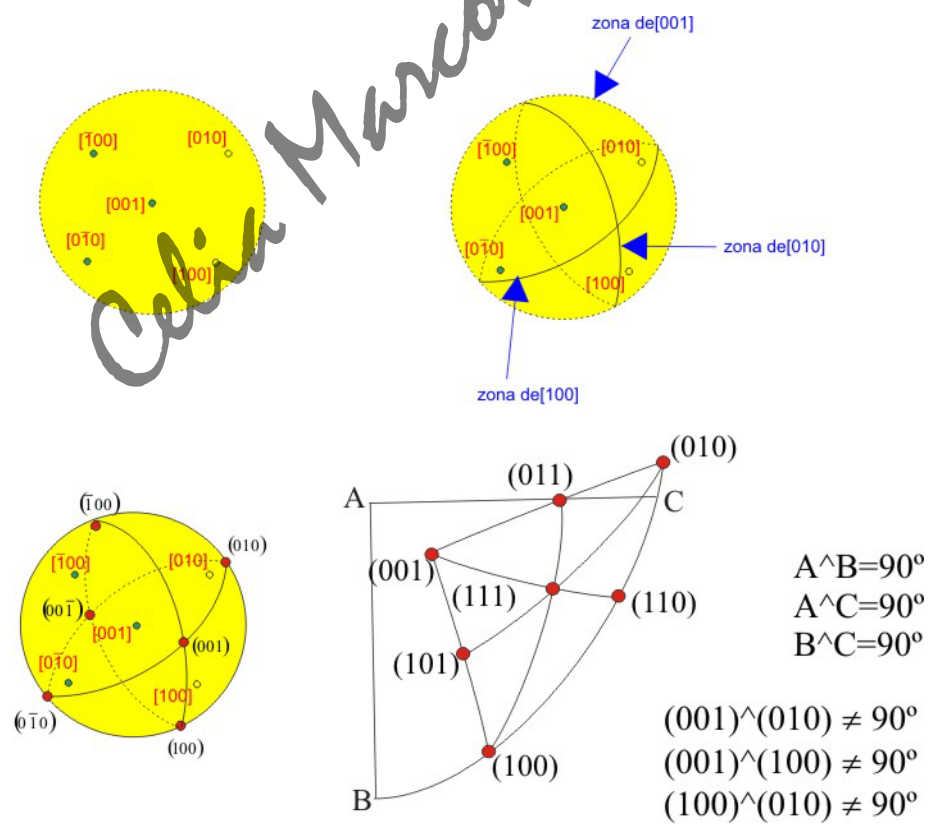


Figura 4.17

4.15 CÁLCULOS CRISTALOGRAFICOS

La proyección estereográfica es útil porque permite obtener el grupo puntual y el sistema cristalino a partir de la representación de los polos de sus caras.

- Para la representación de dichos polos es preciso el conocimiento de las coordenadas esféricas que se obtienen midiendo los ángulos con un *goniómetro*.

GONIÓMETRO

Es un aparato para medir los ángulos interfaciales* de los cristales.

Se utilizan dos tipos principalmente:

1. El goniómetro de contacto, para cristales grandes. Consiste de un transportador de ángulos, con un brazo oscilante que se coloca en contacto con las caras del cristal. En general, los resultados son poco exactos.
2. El goniómetro óptico, apto para pequeños cristales con caras reflectantes y brillantes.

Existen varias versiones de este tipo, dependiendo de la capacidad que tenga el cristal para reflejar un haz de luz dirigido hacia él desde un colimador. La reflexión se detecta mediante un telescopio observador. El cristal se gira desde una posición de reflexión a la siguiente, y se mide el ángulo de rotación. Los goniómetros ópticos son de gran utilidad, debido a su alto grado de precisión y exactitud.

- Conocidas estas coordenadas se puede obtener:

- relación paramétrica:

$$a/b:b/c/c/a \text{ ó } a/b:1:c/b$$

- ángulos de la cruz axial:

$$\alpha, \beta, \gamma$$

Para ello es preciso conocer las caras (100), (010), (001) y (110) ó (101) ó (011), que forman parte de un triángulo esférico, denominado triángulo fundamental.

* Ángulo interfacial es el ángulo existente entre las normales a las dos caras de un cristal

Cuadro 4.5

- Ejemplo de un cristal cúbico:

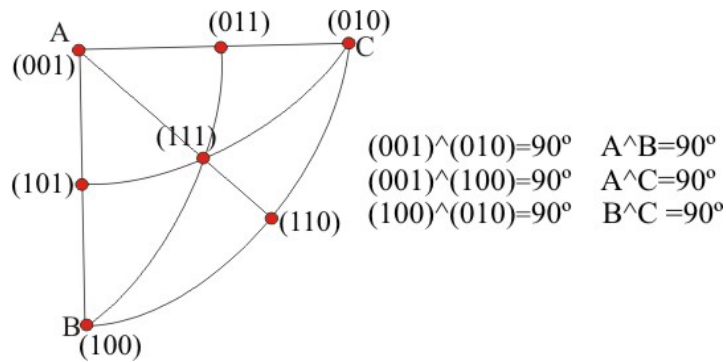


Figura 4.18

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen}(100) \wedge (110)}{\text{sen}(110) \wedge (010)} \cdot \frac{\text{sen}(010) \wedge (001)}{\text{sen}(001) \wedge (100)}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{sen}(001) \wedge (011)}{\text{sen}(011) \wedge (010)} \cdot \frac{\text{sen}(010) \wedge (100)}{\text{sen}(100) \wedge (001)}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}(001) \wedge (101)}{\text{sen}(101) \wedge (100)} \cdot \frac{\text{sen}(100) \wedge (010)}{\text{sen}(010) \wedge (001)}$$

Ecuación 4.2

- En el caso de los sistemas ortogonales el ángulo entre las caras (100) y (010) es igual a 90°
(010) y (001) es igual a 90°

$$\alpha = 180 - (001) \wedge (010)$$

$$\beta = 180 - (001) \wedge (100)$$

$$\gamma = 180 - (100) \wedge (010)$$

Ecuación 4.3

- Para obtener los valores exactos de la relación paramétrica es preciso hacer uso de trigonometría esférica.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

La trigonometría esférica es de gran importancia para la teoría de la proyección estereográfica y en la geodesia. Es también el fundamento de los cálculos astronómicos. Por ejemplo, la solución del llamado triángulo astronómico se utiliza para encontrar la latitud y longitud de un punto, la hora del día, la posición de una estrella y otras magnitudes.

Partimos de una esfera de radio unidad. Si cortamos dicha esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera obtenemos lo que se llama un **círculo máximo**. Si por el contrario, el plano de corte no pasa por el centro de la esfera, lo que obtendremos es un **círculo menor**.

Consideremos ahora una esfera y un círculo máximo. Si trazamos una recta perpendicular al plano que define el círculo máximo y que pasa por el centro de la esfera, lo que obtenemos son dos puntos en la esfera que se denominan **polos**. Además, el círculo máximo va a dividir a la esfera en dos semiesferas llamadas **hemisferios**.

El **ángulo diedro** es el ángulo comprendido entre dos círculos máximos.

En este punto podemos definir a un **triángulo esférico** como una porción de superficie esférica limitada por tres círculos máximos, con la condición de que la medida de cada uno de los arcos sea menor que 180° .

Para resolver un triángulo esférico basta con conocer al menos tres de los seis datos de dicho triángulo (tres lados y tres ángulos).

Relaciones que cumplen los lados y ángulos de un triángulo:

- Un lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que 360° .
- La suma de los tres ángulos es mayor que 180° y menor que 540° .
- Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos también son iguales entre sí.
- Si un triángulo esférico tiene dos ángulos desiguales, a mayor ángulo se opone el mayor lado.

Después de ver estas relaciones, es interesante reseñar, que para la resolución de triángulos esféricos existen una serie de fórmulas, como las fórmulas de Bessel, fórmula de la cotangente, fórmulas de Borda ... Además, en el caso de un triángulo esférico rectángulo (un ángulo es de 90°), o de uno rectilátero (un lado es de 90°), la resolución se simplifica con la regla del pentágono de Neper.

Teorema de los senos: En un triángulo esférico, los lados y sus ángulos opuestos verifican las proporciones (primer grupo de Bessel):

$$(\sin a / \sin A) = (\sin b / \sin B) = (\sin c / \sin C)$$

Teorema del coseno: En un triángulo esférico, cada lado y su ángulo opuesto satisfacen las igualdades (segundo grupo de Bessel):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Cuadro 4.6

- Los índices de Miller de un polo de una cara, distinto de uno de los fundamentales, puede calcularse por alguno de los métodos siguientes:
- Método de los cosenos directores de Wulff

$$(a/h)\cos \varphi = (b/k)\cos \chi = (c/l)\cos \omega$$

Ecuación 4.4

Los ángulos (φ , χ , ω) son los que forma la normal a la cara con los tres ejes de coordenadas (x , y , z) respectivamente.

- Método de la razón de los senos de Miller:
 - Consiste en calcular los índices del polo de una cara conocidos los índices de los polos de las otras tres caras con las que está en zona. Ejemplo: En la Figura 4.19 podrían calcularse los índices de la cara E si se conocen los de las caras C, D y F, ya que están todas en zona.

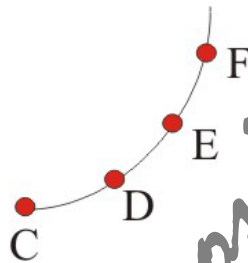


Figura 4.19