



Tema 5: Análisis conjunto y teoremas límite

COCHES Se han analizado conjuntamente las variables número de hijos de cada familia (X) y número de coches por familia (Y), obteniéndose los siguientes resultados:

Y \ X	1	2	3
1	0,19	0,16	0,09
2	0,06	0,19	0,31

- ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga dos hijos y posea un coche? ¿Cuál es la probabilidad de que un hogar tenga como máximo dos hijos y posea menos de dos coches? ¿Y la de que un hogar tenga menos de 3 hijos y cuente con un coche?
- Obtener la distribución del número de coches por familia. ¿Cuál es la proporción de hogares que cuentan con más de un coche? Obtener la distribución marginal del número de hijos en la familia.
- Obtener las características de la distribución (vector de esperanzas y matriz de varianzas-covarianzas).
- ¿Son independientes ambas variables?

Resultados

- La probabilidad de que un hogar tenga dos hijos y posea un coche es 0,16.
La probabilidad de que un hogar tenga menos de 3 hijos y posea menos de dos coches es 0,35.
La probabilidad de que un hogar tenga menos de 3 hijos y cuente con un coche es 0,35.
- La distribución del número de coches por familia (Y) vendrá dada por:

y_j	$P_Y(y_j)$
1	0,44
2	0,56

La proporción de hogares que cuentan con más de un coche es 0,56.

La distribución marginal de X vendrá dada por:

x_i	$P_X(x_i)$
1	0,25
2	0,35
3	0,4

- La matriz de varianzas-covarianzas será:

$$\text{Var} - \text{Cov}(X, Y) = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,17 \\ 0,17 & 0,25 \end{pmatrix}$$

- Las variables no son independientes.



COVARIANZA Deducir la expresión abreviada para el cálculo de la covarianza.

VARIANZA Dadas dos variables aleatorias independientes X e Y, demostrar que $\text{Var}(X+Y)=\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)$

INGRESOS Una empresa automovilística ha comprobado que los ingresos diarios (miles de euros) obtenidos con cada uno de los dos modelos más vendidos son independientes y siguen una distribución normal $X_1 \approx N(500, 30)$ y $X_2 \approx N(750, 40)$.

- ¿Qué distribución seguirán “los ingresos diarios obtenidos con la venta de ambos modelos”? Calcular los ingresos totales máximos obtenidos el 40% de los días.
- ¿Qué porcentaje de días los ingresos del modelo 2 superan a los del modelo 1 en al menos 225.000 euros?
- Si los ingresos diarios son independientes, calcular la probabilidad de que los ingresos semanales medios superen los 1,27 millones de euros.

Resultados

- Los ingresos diarios obtenidos con la venta de ambos modelos siguen una distribución $N(1250, 50)$.
Los ingresos máximos obtenidos el 40% de los días son 1237,5.
- El porcentaje de días que los ingresos del modelo 2 superan a los del modelo 1 en al menos 225.000 euros es del 69%.
- La probabilidad de que los ingresos semanales medios superen los 1,27 millones de euros es 0,1446.

CORREOS Se sabe que el 5% de los paquetes que se reciben diariamente en la estafeta de correos de un pueblo son devueltos.

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea devuelto más de un paquete de los 5 recibidos cierto día?
- Si en dos días independientes elegidos al azar se recibieron 8 y 4 paquetes respectivamente ¿Cuál es la probabilidad de que en total no se devuelva ningún paquete?
- Si en tres días independientes elegidos al azar se recibieron 11, 9 y 12 paquetes respectivamente, calcular la probabilidad de que en total se devuelvan como máximo 5 paquetes.
- El número mensual de paquetes extraviados sigue una distribución de Poisson con esperanza 0,2. Obtener la probabilidad de que en un trimestre se extravíe 1 paquete.
- El peso de un paquete es una variable aleatoria con media 1,5 kg y desviación típica 0,5. Sabiendo que un día se han recibido 10 paquetes, ¿cuál es la probabilidad de que su peso total oscile entre 13 y 17 kg?

Resultados

- La probabilidad de que sea devuelto más de un paquete de los 5 recibidos cierto día es 0,0226.
- Si en dos días independientes elegidos al azar se recibieron 8 y 4 paquetes respectivamente la probabilidad de que en total no se devuelva ningún paquete es 0,54.



- c) Si en tres días independientes elegidos al azar se recibieron 11, 9 y 12 paquetes respectivamente, la probabilidad de que en total se devuelvan como máximo 5 paquetes es aproximadamente 0,9992.
- d) La probabilidad de que en un trimestre se extravíe 1 paquete es 0,329.
- e) La probabilidad de que el peso total de los 10 paquetes oscile entre 13 y 17 kg es de al menos 0,375.

EMISIONES Las emisiones diarias de CO₂ (en toneladas) de una determinada empresa son una variable aleatoria con esperanza 10 y desviación típica 2.

- a) Calcular la probabilidad de que las emisiones de CO₂ en un día cualquiera se encuentren entre 6 y 14 toneladas. (PROPUESTO)
- b) Bajo el supuesto de que las emisiones diarias de CO₂ son independientes, obtener la probabilidad de que las emisiones totales realizadas a lo largo de un trimestre (90 días) superen las 920 toneladas.
- c) La empresa recibirá una sanción del ministerio de sanidad si supera las 920 toneladas de emisión trimestral. ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 7 trimestres la empresa no reciba ninguna sanción? Obtener el número esperado de sanciones que sufrirá la empresa por superar el límite de emisión.

Resultados

- a) La probabilidad de que las emisiones de CO₂ en un día cualquiera se encuentren entre 6 y 14 toneladas es de al menos 0,75.
- b) La probabilidad de que las emisiones totales realizadas a lo largo de un trimestre superen las 920 toneladas es aproximadamente 0,15.
- c) La probabilidad de que en los próximos 7 trimestres la empresa no reciba ninguna sanción es 0,32.
El número esperado de sanciones que sufrirá la empresa por superar el límite de emisión es 1,05 sanciones.

TELEFONIA Una empresa de telefonía móvil mide el rendimiento de sus comerciales según sus ventas diarias (en €). Sabiendo que las ventas diarias de cada comercial son variables aleatorias independientes con esperanza 475 y desviación típica 30:

- a) ¿Cuál será la probabilidad de que en una semana de 6 días laborables las ventas totales de un comercial se desvíen de su valor esperado en menos de 100 €?
- b) Bajo el supuesto de normalidad de la variable ventas diarias:
 - b.1) Obtener la probabilidad pedida en el apartado anterior y comparar los resultados.
 - b.2) El gerente de la empresa ha decidido dar una paga extraordinaria a aquellos comerciales que obtengan unas ventas semanales superiores a 2950 €. Seleccionados al azar 34 comerciales, ¿cuál es la probabilidad de que menos de siete reciban dicha paga?

Resultados

- a) La probabilidad de que en una semana de 6 días laborables las ventas totales de un comercial se desvíen de su valor esperado en menos de 100 € es de al menos 0,46.
- b) Bajo el supuesto de normalidad de la variable ventas diarias:
 - b.1) La probabilidad pedida en el apartado anterior es 0,8262.
Ahora obtenemos una probabilidad exacta que está dentro del intervalo que nos ofrecía la cota inferior de probabilidad de la desigualdad de Chebyshev.



- b.2) La probabilidad de que menos de siete de los 34 comerciales seleccionados al azar reciban la paga es aproximadamente 0,9846.

TV Se está realizando un estudio sobre el equipamiento de los hogares. A tal efecto se analizan las variables X (número de hijos en las familias) e Y (número de aparatos de TV en los hogares), obteniendo la siguiente distribución conjunta:

Y \ X	1	2	3	4 o más
1	0,06	0,2	0,1	0,07
2	0,05	0,15	0,1	0,05
3	0,04	0,05	0,1	0,03

- Obtener la distribución del número de TV en los hogares.
- ¿Qué proporción de hogares cuenta con más de un televisor?
- ¿Son independientes ambas variables?
- ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 2 hijos y más de 1 TV?

Resultados

a)

y_j	$P_Y(y_j) = p_{.j}$
1	0,43
2	0,35
3	0,22

- La proporción de hogares cuenta con más de un televisor es del 57%
- Las variables no son independientes.
- La probabilidad de que una familia tenga 2 hijos y más de 1 TV es de 0,2.

PESCA En un estudio sobre el sector pesquero de cierta región se ha obtenido que la cantidad media de pescado desembarcado diariamente es de 16 Tm, con una desviación típica de 3 Tm.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana cualquiera las capturas se desvíen de su valor esperado en más de 30 Tm?
- Calcular la probabilidad de que las capturas totales realizadas en 40 días superen las 600 Tm.
- En el mismo estudio se ha detectado que el volumen de capturas del 35% de la flota pesquera es bajo. Si en un día cualquiera llegan al puerto A 20 barcos y al puerto B 14, calcular la probabilidad de que al menos en total 13 barcos hayan tenido un nivel bajo de capturas.

Resultados

- La probabilidad de que en una semana cualquiera las capturas se desvíen de su valor esperado en más de 30 Tm es como máximo de 0,07.
- La probabilidad de que las capturas totales realizadas en 40 días superen las 600 Tm es aproximadamente de 0,98.
- La probabilidad de que al menos en total 13 barcos hayan tenido un nivel bajo de capturas es aproximadamente de 0,41.



HIPERMERCADO En una cadena de hipermercados las ventas diarias de productos de alimentación (expresadas en millones de euros) siguen una distribución $N(5,1)$ y las ventas diarias de otros tipos de productos también se distribuyen normalmente con valor esperado de 2 millones de euros y desviación típica 0,5, siendo ambas variables independientes.

- Completar razonadamente la siguiente afirmación: “El 30% de los días las ventas totales no superan los ... millones”.
- ¿Qué proporción de días las ventas de productos de alimentación superan a las de otros tipos de productos en al menos 2,5 millones de euros?
- Si se observan las ventas totales para una muestra 40 días independientes e igualmente distribuidos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de ventas sea superior a 7,5 millones de euros?

Resultados

- “El 30% de los días las ventas totales no superan los 6,41 millones”.
- La proporción de días que las ventas de productos de alimentación superan a las de otros tipos de productos en al menos 2,5 millones de euros es del 67,36%.
- La probabilidad de que la media de ventas de 40 días sea superior a 7,5 millones de euros es del 0,0023.

AUTOBÚS El tiempo que tarda un autobús interurbano en efectuar su ruta habitual entre dos ciudades (en minutos) es una variable aleatoria con esperanza 20 y desviación típica 6.

- Si el autobús realiza en un día 25 desplazamientos, obtener la probabilidad de que el tiempo medio empleado se desvíe de su esperanza en más de 4 minutos.
- ¿Cambiaría la respuesta al apartado anterior si el autobús pasase a realizar 32 desplazamientos al día?
- La probabilidad de que no queden plazas disponibles en el autobús y que, por tanto, un cliente deba esperar al siguiente servicio es de un 10%. Si un individuo utiliza dicho transporte dos veces al día, ¿cuál es la probabilidad de que en 20 días tenga que esperar en menos de 6 ocasiones al servicio siguiente?
- El número mensual de averías del autobús sigue una distribución de Poisson con esperanza 0,3. Obtener la probabilidad de que en un trimestre el autobús sufra dos averías.

Resultados

- En un autobús que se realiza un día 25 desplazamientos, la probabilidad de que el tiempo medio empleado se desvíe de su esperanza en más de 4 minutos es como máximo de 0,09.
- En un autobús en el que se realiza un día 32 desplazamientos, la probabilidad de que el tiempo medio empleado se desvíe de su esperanza en más de 4 minutos es aproximadamente de 0,0002.
- La probabilidad de que en 20 días el cliente tenga que esperar en menos de 6 ocasiones al servicio siguiente es 0,7852.
- La probabilidad de que en un trimestre el autobús sufra dos averías es aproximadamente de 0,1647.



PANADERIA Las cantidades de pan (X_1 , en miles de kg) y de bollería (X_2 , en miles de kg) vendidas mensualmente por cierta panadería son dos v.a. independientes con las siguientes distribuciones: $X_1 \approx N(20, 2)$ y $X_2 \approx N(22, 2,5)$

- ¿Cuál es la probabilidad de que, en un mes cualquiera, la cantidad total vendida de ambos productos supere los 44.000 kg?
- Los meses en los que la cantidad total vendida de ambos productos supera los 44.000 kg los empleados de la panadería reciben una prima en sus salarios. ¿Cuál es la probabilidad de que reciban esta prima más de 12 veces durante los próximos tres años?
- Se sabe que un 20% de los clientes de la panadería compra tanto pan como bollería. Obtener el número esperado de clientes que tienen que entrar en la panadería hasta que uno de ellos adquiera ambos tipos de productos.

Resultados

- La probabilidad de que, en un mes cualquiera, la cantidad total vendida de ambos productos supere los 44.000 kg. es de 0,2646.
- La probabilidad de que los empleados de la panadería reciban esta prima más de 12 veces durante los próximos tres años es aproximadamente de 0.1292.
- El número esperado de clientes que tienen que entrar en la panadería hasta que uno de ellos adquiera ambos tipos de productos es de 5.

MULTINACIONAL Los beneficios anuales (en millones de euros) de las filiales de cierta multinacional se distribuyen normalmente con valor esperado 0,2 y desviación típica 0,06.

- El 70% de las filiales cuyos beneficios alcanzan al menos los 150.000 euros desarrollan nuevos planes de inversión en el futuro, mientras que la proporción descende al 25% en el caso de que los beneficios sean inferiores a dicha cantidad. Seleccionada al azar una filial calcular la probabilidad de que acometa nuevos planes de inversión.
- Si la empresa dispone de 40 filiales en Europa, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 25 lleven a cabo nuevos planes de inversión?
- Los empleados reciben una gratificación anual de 300 euros en aquellas filiales cuyos beneficios anuales oscilan entre 100.000 euros y 150.000 euros, elevándose dicha gratificación a 600 euros si los beneficios anuales de la filial superan los 150.000 euros. Obtener la distribución de la variable “gratificación anual por empleado”.

Resultados

- La probabilidad de acometer nuevos planes de inversión es del 60,85%.
- La probabilidad de que al menos 25 lleven a cabo nuevos planes de inversión es aproximadamente de 0,4801.
- G: “gratificación anual por empleado”.
 $P(G = 0) = 0,0475$
 $P(G = 300) = 0,1558$
 $P(G = 600) = 0,7967$

CALIFICACIONES La calificación esperada en el examen de cierta asignatura universitaria es de 6 puntos con una desviación estándar 1,1.

- Si un grupo de 4 amigos va a presentarse a ese examen, justificar cuál será la probabilidad de que se sitúen en una media de aprobado (entre 5 y 7 puntos).



- b) Estudiar cuál es la probabilidad de que en una clase con 60 presentados la calificación media supere los 6,2 puntos.
- c) A través de los anuarios universitarios se sabe que sólo un 2% de los alumnos presentados obtienen la calificación de “Matrícula de Honor” en la asignatura. Estudiar la variable aleatoria “estudiantes con Matrícula de Honor” sobre los 60 presentados al examen y obtener la probabilidad de que haya más de 2 alumnos en esta categoría.

[Extraído de *Análisis de Datos Económicos II. Métodos Inferenciales*, problema 4.3, pág. 217-218]

Resultados

- a) La probabilidad de que la nota media de cuatro amigos se sitúe entre 5 y 7 puntos es como mínimo de 0,6975.
- b) La probabilidad de que en una clase con 60 presentados la calificación media supere los 6,2 puntos es aproximadamente de 0,0795.
- d) El número de matrículas de honor de los 60 estudiantes presentados y seguirá un modelo binomial con $n=60$ y $p=0,02$, y la probabilidad de que de que haya más de 2 alumnos en esta categoría es aproximadamente de 0,1153.

FLORISTERÍA Las ventas diarias (en euros) de una floristería se distribuyen aleatoriamente con esperanza 500 y desviación típica 130.

- a) Obtener la probabilidad de que las ventas de 7 días oscilen entre 3.000 y 4.000 euros.
- b) El propietario piensa llevar a cabo una reforma en el local cuyos gastos ascenderán a 42.000 euros y cree poder sufragarlos con las ventas en la floristería durante un trimestre. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas trimestrales totales cubran los gastos asignados a la reforma del local?
- c) Bajo el supuesto de normalidad de la variable ventas diarias, calcular las probabilidades pedidas en los apartados anteriores y comparar los resultados.
- d) Según los datos disponibles, la proporción de clientes que solicitan una planta es del 10%:
 - d1) Obtener la probabilidad de que un día cualquiera en el que entran 25 clientes, al menos 2 soliciten una planta.
 - d2) ¿Cuál es el número esperado de clientes que entran en la floristería hasta que alguien solicita una planta?

Resultados

- a) La probabilidad de que las ventas de 7 días oscilen entre 3.000 y 4.000 euros es como mínimo de 0,5268.
- b) La probabilidad de que las ventas trimestrales totales cubran los gastos asignados a la reforma del local es aproximadamente 0,9925
- c) En el supuesto de normalidad de la variable ventas diarias, “la venta total de una floristería en 7 días” se distribuye aproximadamente según un modelo normal, y en ese caso la probabilidad del apartado a) es aproximadamente de 0,853. En el caso del apartado b) la venta total de la floristería en un trimestre ya no se distribuirá aproximadamente según un modelo normal, sino que exactamente seguirá un modelo normal $N(45000;1233,3)$. La probabilidad pedida es la misma, pero en ese caso no será aproximada sino exacta.
- d)
 - d1) La probabilidad de que al menos dos clientes soliciten una planta es de 0,7288.
 - d2) El número esperado de clientes que entran en la floristería hasta que alguien solicita una planta es de 10.