

Capítulo 5

Aplicaciones lineales

En este capítulo resolveremos, con ayuda del MatLab, ejercicios que nos permitan adquirir destreza en el manejo de las aplicaciones lineales, gracias a la posibilidad de representarlas por medio de matrices. Comenzaremos, por tanto, recordando como se representa matricialmente una aplicación lineal, para, a partir de dicha representación obtener bases de los conjuntos núcleo e imagen. Asimismo, veremos como afectan a esta representación los cambios de base que se realizan en los espacios vectoriales inicial y final.

5.1. Representación matricial de una aplicación lineal

Sean U y V dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K de dimensiones n y m respectivamente.

Dada una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ y dadas dos bases, $\mathcal{B}_U$ en U y $\mathcal{B}_V$ en V , tenemos que la matriz A de m filas y n columnas, cuyas columnas son las coordenadas en $\mathcal{B}_V$ de las imágenes por f de los vectores de $\mathcal{B}_U$, representa de manera completa la aplicación. Esta matriz se llama matriz asociada a la aplicación lineal respecto a las bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_V$, y es la principal herramienta a la hora de trabajar con aplicaciones lineales en un ordenador. Si representamos por una columna X , las coordenadas en $\mathcal{B}_U$ de un vector v de U y por una columna Y las coordenadas en $\mathcal{B}_V$ de la imagen por f de v entonces

$$Y = A X$$

Ejemplo 5.1.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, respecto de las bases canónicas de ambos espacios. Constrúyase un fichero **funcionf.m** que

dado un vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nos devuelva su imagen por f .

```
x1=input('Introduce la primera coordenada del vector, x1= ');
x2=input('Introduce la segunda coordenada del vector, x2= ');
A=[1 2;3 4;5 6];
Y=A*[x1;x2]
```

Así, por ejemplo, si lo ejecutamos en la ventana de comandos para calcular la imagen del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tendríamos:

```
>> funcionf
Introduce la primera coordenada del vector, x1= 1
Introduce la primera coordenada del vector, x2= 0
Y =
    1
    3
    5
```

5.2. Subespacios núcleo e imagen

Sea A la matriz $m \times n$ asociada a una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$, respecto de las bases $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Por definición $\text{Ker}f = \{v \in U \mid f(v) = \vec{0}\}$. Luego, si denotamos por $X \in \mathbb{R}^n$ a las coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}_U$, tendremos que, para determinar $\text{Ker}f$ en términos de coordenadas, nos bastará con encontrar el conjunto

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \vec{0}\}$$

es decir, el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo.

Por tanto, según hemos visto en el capítulo 4, una base del núcleo de f la forman las columnas de la matriz resultante de la orden **null(A)**.

Ejemplo 5.2.1 *Constrúyase un fichero **nucleo**, que dada la matriz asociada a una aplicación lineal nos devuelva un sistema de vectores que sean base del núcleo de dicha aplicación. Utilícese este fichero para calcular una base del núcleo del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución

```
%Calcula una base del nucleo.
%La base son las columnas de la matriz base.
A=input('Introduzca la matriz de la aplicación lineal, A= ');
base=null(A);
disp('La base son las columnas de la matriz:')
disp(base)
```

Para ejecutarlo sobre la matriz dada:

```
>> nucleo
Introduzca la matriz de la aplicación lineal, A= [1 2 3;4 5 6;5 7 9];
```

La base son las columnas de la matriz:

```
-0.4082  
0.8165  
-0.4082
```

Para estudiar el subespacio imagen basta recordar que $Imf = \langle f(u_1), \dots, f(u_n) \rangle$, es decir, que está engendrado por las columnas de la matriz A .

De acuerdo con esto y teniendo en cuenta el fichero **base** creado en el **ejemplo 3.1.2** será sencillo construir bases para este subespacio.

Ejemplo 5.2.2 *Constrúyase un fichero **imagen** que, dada la matriz asociada a una aplicación lineal, nos devuelva un sistema de vectores que sean base de la imagen de dicha aplicación. Utilícese esta función para calcular una base de la imagen del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución

```
%Calcula una base del subespacio imagen.  
A=input('Introduzca la matriz de la aplicación lineal, A= ');  
E=rref(A. ');r=rank(A);  
Imf=E(1:r,:).';%La base son las columnas de la matriz Imf  
disp('La base son las columnas de la matriz: ')  
disp(Imf)
```

En la ventana de comandos :

```
>> imagen  
Introduzca la matriz de la aplicación lineal, A= [1 2 3;4 5 6;5 7 9];  
La base son las columnas de la matriz:  
1      0  
0      1  
1      1
```

5.3. Cambio de bases en una aplicación lineal

Reemplacemos la base $\mathcal{B}_U$ por una base $\mathcal{B}'_U$, de manera que la matriz del cambio de base sea P . Si denotamos por X y X' , respectivamente, a las coordenadas del vector v , en las bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}'_U$, tenemos $X = PX'$. Por tanto, $Y = AX = APX'$, de lo que se deduce que la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases $\mathcal{B}'_U$ y $\mathcal{B}_V$ es AP .

Reemplacemos, ahora, la base $\mathcal{B}_V$ por una base $\mathcal{B}'_V$, de manera que la matriz del cambio de base sea Q . Si denotamos por Y e Y' , respectivamente, a las coordenadas del vector $f(v)$, en

las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}'_V$, tenemos $Y = QY'$. Por tanto, $Y = QY' = AX$, o bien $Y' = Q^{-1}AX$ de lo que se deduce que la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}'_V$ es $Q^{-1}A$. Asimismo, escribiendo X en función de X' se llega a $Y' = Q^{-1}APX'$, por lo que la matriz asociada a la aplicación respecto de las bases $\mathcal{B}'_U$, $\mathcal{B}'_V$ será $Q^{-1}AP$.

Ejemplo 5.3.1 Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, en las bases canónicas, tiene asociada una matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcúlese la matriz asociada a f respecto de las bases:

$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, -1, -1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

```
%Cambio de base en aplicaciones lineales
%Matriz de la aplicación en canonicas:A
A=[1 5 -1 2;2 1 4 1;1 2 1 1];
%P es la matriz de paso de la canonica a B1
P=[1 1 1 1;1 0 1 0;0 1 0 0;1 1 -1 -1].';
%Q es la matriz de paso de la canonica a B2
Q=[1 2 1;0 1 3;1 1 1].';
disp('La matriz respecto de las base B1 y B2 es :')
B=inv(Q)*A*P
```

Si lo salvamos como **cambiolineales.m** la ejecución sería:

```
>> cambiolineales
La matriz respecto de las base B1 y B2 es :
B =
    1.6667    5.3333   -3.0000   -5.6667
   -0.6667    0.6667   -1.0000   -1.3333
    5.3333   -5.3333    8.0000   10.6667
```

Ejercicio 5.1 Constrúyase un fichero que, a partir de la matriz asociada a una aplicación lineal, nos indique si la aplicación es o no es inyectiva, suprayectiva y biyectiva.

Ejercicio 5.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(u_1) = u_1, \quad f(u_2) = 2u_2, \quad f(u_3) = -u_3$$

donde u_1, u_2, u_3 , son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas respecto de la base canónica e_1, e_2, e_3 , son

$$u_1 = (-1, 0, 2), \quad u_2 = (0, 1, 7), \quad u_3 = (2, 0, 3)$$

Se pide:

1. Probar que u_1, u_2, u_3 son una base de $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases

a) $\{u_1, u_2, u_3\}$ y $\{u_1, u_2, u_3\}$

b) $\{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$

de los espacios inicial y final, respectivamente.

3. Hallar la imagen por f del vector $v = 2u_1 + e_2$ y expresarla en las bases

a) $\{u_1, u_2, u_3\}$

b) $\{e_1, e_2, e_3\}$

Ejercicio 5.3 Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que respecto de las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ cumple:

$$T(v_1) = w_1 + 2w_2 + 5w_3 + w_4$$

$$T(v_2) = 2w_1 + 6w_3$$

$$T(v_3) = w_1 + 3w_2 + 6w_3 + w_4$$

Se pide:

1. Indicar si T es o no inyectiva, suprayectiva o biyectiva.
2. Sabiendo que la matriz asociada a T respecto de las bases canónica $\mathcal{B}_{C_1}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^4$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

calcular los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ en función de la canónica.

Ejercicio 5.4 Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas de ambos espacios es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Calcular una base del subespacio $V + \text{Ker} f$, siendo V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ y $v_2 = (-1, 1, -1, 1)$.
2. Calcular una base del subespacio $f(V)$.