

Capítulo 3

Espacios vectoriales

Comenzaremos este apartado resolviendo problemas relacionados con sistemas de vectores en espacios vectoriales. Dado un sistema de vectores veremos como estudiar su dependencia lineal, como calcular la dimensión del subespacio que engendra, como obtener una base del mismo, etc.

Seguidamente, abordaremos problemas asociados a subespacios vectoriales: cálculo de bases para los subespacios suma e intersección.

Concluiremos el tema con un apartado dedicado a los cambios de base.

3.1. Sistemas de vectores

La mayoría de los ejercicios que involucran sistemas de vectores se resuelven a través del estudio de la matrices cuyas filas o cuyas columnas son los vectores del sistema dado. Por tanto, es imprescindible, para no adulterar los resultados, indicar con claridad en cada momento cual de las dos matrices estamos utilizando.

Ejemplo 3.1.1 *Escríbase un fichero **.m** que dado un sistema de vectores nos calcule la dimensión del subespacio que engendra. A continuación, utilícese para calcular el rango del sistema formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, donde $v_1 = (5, 4, 8)$, $v_2 = (0, 0, 0)$, $v_3 = (5, 4, 8)$, $v_4 = (1, 0, 0)$.*

Solución

Puesto que para cualquier matriz el rango de filas y el de columnas coincide, en este caso podremos trabajar con los vectores de nuestro sistema colocados por filas o columnas indistintamente. En el fichero, que llamaremos **dimension**, especificaremos la opción elegida:

```
%Calcula el rango de un sistema de vectores
A=input('Matriz cuyas columnas son los vectores del sistema: A= ');
r=rank(A);
disp('La dimension del subespacio es: ')
disp(r)
```

Al ejecutarlo en la ventana de comandos para calcular el rango de la familia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dada, tendremos:

```
>> dimension
```

Matriz cuyas columnas son los vectores del sistema: A= [5 4 8;0 0 0;5 4 8;1 0 0].'

La dimension del subespacio es:

2

Ejemplo 3.1.2 *Constrúyase un fichero **base** que calcule una base de un subespacio vectorial, conocido un sistema de vectores generadores del subespacio. A continuación utilícese para calcular una base del subespacio engendrado por los vectores de $\mathbb{R}^4$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, donde $v_1 = (1, 3, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$, $v_3 = (0, 2, 1, 0)$, $v_4 = (2, 4, 3, 1)$, $v_5 = (1, 1, 1, 2)$.*

Solución

Si queremos calcular la base de un subespacio generado por un sistema de vectores conocido y llamamos A a la matriz cuyas columnas son los vectores del sistema considerado, podemos usar la orden `colspace(A)`. No obstante, esta orden actúa de manera simbólica, y no es la mejor manera de trabajar en MATLAB. La manera más eficiente de hacerlo sería construyendo la matriz cuyas filas son los vectores considerados, para, a continuación, hallar su escalonada reducida y quedarnos con tantos vectores de ésta como indique el rango de dicha matriz (que como ya vimos es la dimensión del subespacio).

```
%Calcula una base a partir de un generador
```

```
A=input('Matriz cuyas filas son los vectores del sistema: ');
```

```
r=rank(A);
```

```
disp('El rango del sistema es: ')
```

```
disp(r)
```

```
reducida=rref(A);
```

```
B=reducida(1:r,:).'; % Nos quedamos con r filas y trasponemos luego la matriz
```

```
disp('La base del subespacio son las columnas de la matriz ')
```

```
disp(B)
```

Al ejecutarlo en la ventana de comandos para calcular una base del subespacio engendrado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ tendremos:

```
>> A=[1 3 2 1 ; 1 1 1 1 ; 0 2 1 0; 2 4 3 1 ; 1 1 1 2];% vectores sistema por filas
```

```
>> base
```

Matriz cuyas filas son los vectores del sistema: A

El rango del sistema es:

3

La base del subespacio son las columnas de la matriz

1.0000	0	0
0	1.0000	0
0.5000	0.5000	0
0	0	1.0000

3.2. Subespacios vectoriales

Ejemplo 3.2.1 Constrúyase un fichero que conocidos los generadores de dos subespacios V_1 y V_2 nos devuelva la dimensión y una base del subespacio suma. Ejecútese en la ventana de comandos para obtener una base de $V_1 + V_2$, siendo

$$V_1 = \langle (1, 2, 5, 3, 2), (3, 1, 5, -6, 6), (1, 1, 3, 2, 0) \rangle$$

y

$$V_2 = \langle (2, 1, 4, -3, 4), (3, 1, 3, -2, 2), (9, 2, 3, -1, -2) \rangle$$

Solución

Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 sabemos que la unión de dos sistemas generadores de ambos nos proporciona un sistema generador del subespacio suma $V_1 + V_2$. Basándonos en esto, para resolver el ejercicio, en el archivo que llamaremos **suma** se escribe

```
%A1 y A2 matrices cuyas filas generan los subespacios dados.
%[A1;A2] matriz cuyas filas genera V1+V2.
A1=input('Matriz cuyas filas engendran V1, A1= ');
A2=input('Matriz cuyas filas engendran V2, A2= ');
r=rank([A1;A2]);dim=r;disp('La dimensión es'), disp(r)
R=rref([A1;A2]);B=R(1:r,:).';
disp('La base del subespacio son las columnas de la matriz B' )
disp(B)
```

La ejecución en la ventana de comandos sería la siguiente:

```
>> suma
Matriz cuyas filas engendran V1, A1= [1 2 5 3 2;3 1 5 -6 6;1 1 3 2 0];
Matriz cuyas filas engendran V2, A2= [2 1 4 -3 4;3 1 3 -2 2;9 2 3 -1 -2];
La dimensión es
4
```

La base del subespacio son las columnas de la matriz B

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}$$

Ejemplo 3.2.2 Dados los subespacios

$$V_1 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \mid x + y = 0, z + t = 0\}$$

y

$$V_2 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5 \mid x - t = 0\}$$

Calcúlese una base del subespacio $V_1 \cap V_2$.

Solución

El subespacio intersección estará formado por los vectores de $\mathbb{R}^5$ cuyas coordenadas satisfagan el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

Por ello, en el fichero **Ejemplo3_2_2** escribimos:

```
A=[1 1 0 0 0;0 0 1 1 0;1 0 0 -1 0];% matriz de coeficientes del sistema
Base=null(A);
disp('La base buscada son las columnas de la matriz:');
disp(Base)
```

3.3. Cambios de base

Los cambios de base en MATLAB son fáciles de hacer si se hacen matricialmente.

Sean $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ dos bases de un espacio vectorial V de dimensión n . Supongamos que un vector $v \in V$ tiene unas coordenadas $X = (x_1, \dots, x_n)$ en la base $\mathcal{B}$ y unas coordenadas $Y = (y_1, \dots, y_n)$ en la base $\mathcal{B}'$, es decir que $v = x_1u_1 + \dots + x_nu_n = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$. Supongamos que conocemos las coordenadas de los vectores de la base (nueva), $\mathcal{B}'$, respecto de la base (antigua), $\mathcal{B}$, es decir que sabemos que

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= p_{11}u_1 + \dots + p_{n1}u_n \\ v_2 &= p_{12}u_1 + \dots + p_{n2}u_n \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ v_n &= p_{1n}u_1 + \dots + p_{nn}u_n \end{aligned} \right\}$$

Según se ha visto en teoría, la matriz $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$ es la matriz de paso o del

cambio de base de la base (antigua) $\mathcal{B}$ a la base (nueva) $\mathcal{B}'$, y la relación entre las coordenadas X e Y de v es:

$$X = PY$$

Ejemplo 3.3.1 Se consideran la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y los vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-2, 2, 3), v_2 = (-8, 5, 2), v_3 = (-7, 2, 6)$$

1. Encuéntrese una base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que P sea la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$.

2. *Calcúlense las coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ del vector v cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ son $(1, 2, 3)$.*

Solución

Lo resolvemos en el fichero **cambiobase1** siguiente:

```
% Ejemplo de cambio de base
P=[1 2 -1;-3 -5 0;4 6 1];
% Denotaremos por X,X1,X2 respectivamente a las coordenadas respecto de
% las bases canónica, {B1} y {B2} de un vector cualquiera v .
% Denotaremos B1,B2, respectivamente, a las matrices cuyas columnas son las
% coordenadas de las bases {B1} y {B2} en la base canónica
B2=[-2 2 3;-8 5 2;-7 2 6].'; % B1 ES LA MATRIZ BUSCADA.
% Por tanto:X=B1*X1;X=B2*X2;X1=P*X2.
disp('Apartado1')
% X=B1*X1=B2*X2=B2*inv(P)*X1, luego:B1=B2*inv(P)
B1=B2*inv(P);
disp('Respecto de la base canónica:')
u1=B1(:,1),u2=B1(:,2),u3=B1(:,3)

disp('Apartado2')
% X1=P*X2 luego X2=inv(P)*X1
X1=[1; 2; 3]; X2=inv(P)*X1
```

Ejemplo 3.3.2 *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran las bases: $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde*

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1, 1), u_3 = (0, 0, 1, 1), u_4 = (0, 0, 0, 1)$$

y

$$v_1 = (1, 3, 2, -3), v_2 = (1, -2, 0, 2), v_3 = (-3, -1, -3, 0), v_4 = (3, 4, 4, -3)$$

Calcúlese la matriz P que realiza el cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$. Calcúlense las coordenadas en $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(1, 1, 1, 1)$.

Solución

```
% Ejemplo de cambio de base
% Denotaremos por X ,X1,X2 respectivamente a las coordenadas respecto de
% las bases canónica, {B1} y {B2} de un vector cualquiera v .
% Denotaremos B1,B2, respectivamente, a las matrices cuyas columnas son las coordenadas
% de las bases {B1} y {B2} en la base canónica.
% Por tanto:X =B1*X1;X=B2*X2;X2=P*X1.
% Luego X=B1*X1=B2*X2=B2*P*X1.Es decir B1=B2*P.
B1=[1 1 1 1;0 1 1 1;0 0 1 1;0 0 0 1].';
B2=[1 3 2 -3;1 -2 0 2;-3 -1 -3 0;3 4 4 -3].';
P=inv(B2)*B1;
disp('La matriz P buscada es ')
disp(P)
```

```

X2=[1 1 1 1].';
disp('Las coordenadas pedidas en la base {B1} son: ')
X1=inv(P)*X2;
disp(X1)

```

Fichero que salvaremos como **cambiodebase2**.

Ejercicio 3.1 En $\mathbb{R}^4$ se considera la base:

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (2, 0, 0, -1), u_2 = (0, 2, -2, 0), u_3 = (0, 2, 0, -2), u_4 = (0, 2, 2, 2)\}$$

Obtégase en dicha base las coordenadas del vector v cuyas coordenadas en la base

$$\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1, 2, 0, 2), v_2 = (-1, 0, 1, 1), v_3 = (0, 0, -2, 1), v_4 = (-3, 0, -3, 0)\}$$

son $(3, -2, -1, 2)$.

Ejercicio 3.2 Dadas dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en $\mathbb{R}^3$, conocemos las coordenadas en ambas bases de un sistema de vectores v_1, v_2, v_3 .

En la base $\mathcal{B}_1$ tenemos

$$v_1 = (2, 1, 3), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (0, 0, 1)$$

y, en la base $\mathcal{B}_2$ tenemos

$$v_1 = (2, -1, 0), v_2 = (-1, 2, 0), v_3 = (-5, 1, 3)$$

Hállense las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}_1$ respecto de los de $\mathcal{B}_2$.

Ejercicio 3.3 Construir un fichero.m que indique cuáles de los siguientes subespacios son suma directa

1. $U = \langle 1 + x^2, 1 - x^2 \rangle$ y $V = \langle -1 + 2x^2 \rangle$, $U, V \leq \mathbb{R}_2[x]$
2. $U = \langle (1, 0, -1) \rangle$ y $V = \langle (2, 1, -1), (-1, -1, 0) \rangle$, $U, V \leq \mathbb{R}^3$
3. $U = \langle (1, 0, -1) \rangle$ y $V = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle$, $U, V \leq \mathbb{R}^3$
4. $U = \langle (1, 0, -1) \rangle$ y $V = \langle (1, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$, $U, V \leq \mathbb{R}^3$

Ejercicio 3.4 En el espacio vectorial de las matrices reales de orden $(2,2)$, se consideran los siguientes subespacios:

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

y

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Créese un fichero `.m` en el que:

1. Se obtenga la dimensión y una base de los subespacios:

$$V_1, V_2, V_1 + V_2 \text{ y } V_1 \cap V_2$$

2. Se estudie si la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ pertenece a $V_1 \cap V_2$ y, en caso de que pertenezca, calcula sus coordenadas respecto de la base obtenida para ese subespacio en el apartado anterior.