



Ejercicio 1 Se consideran el conjunto de aplicaciones siguientes:

$$q(x, y, z, t) = 2x^2 + \alpha y^2 + 2z^2 + \alpha t^2 + 2xz + 2yt$$

- a) Utilice el método de Gauss para calcular los valores de α para los cuales la aplicación sea un cuadrado escalar en $\mathbb{R}^4$.
- b) Para los valores calculados en el apartado anterior, escriba las ecuaciones de un cambio de base en el que la matriz G asociada al cuadrado escalar sea diagonal, dando la base obtenida así como la matriz G .

Solución:

- a) Aplicaremos el método de Gauss. En principio, y dado que α multiplica a cuadrados de coordenadas, $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} q(x, y, z, t) &= 2x^2 + \alpha y^2 + 2z^2 + \alpha t^2 + 2xz + 2yt = 2(x^2 + xz) + \alpha y^2 + 2z^2 + \alpha t^2 + 2yt = \\ &= 2\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \alpha y^2 + \frac{3}{2}z^2 + \alpha t^2 + 2yt = \\ &= 2\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \alpha\left(y^2 + \frac{2}{\alpha}yt\right) + \frac{3}{2}z^2 + \alpha t^2 = 2\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \alpha\left(y + \frac{1}{\alpha}t\right)^2 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}t^2 \end{aligned}$$

de donde se obtienen las condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \alpha^2 - 1 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha > 1$$

- b) Las ecuaciones del cambio inverso serían:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = x + \frac{1}{2}z \\ \hat{y} = y + \frac{1}{\alpha}t \\ \hat{z} = z \\ \hat{t} = t \end{array} \right\}$$

y las del cambio de base son:

$$\left. \begin{array}{l} x = \hat{x} - \frac{1}{2}\hat{z} \\ y = \hat{y} - \frac{1}{\alpha}\hat{t} \\ z = \hat{z} \\ t = \hat{t} \end{array} \right\}$$

La matriz de cambio de base sería:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, para cada $\alpha > 1$ en la base

$$\mathcal{B} = \left\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 0, 1, 0\right), \left(0, -\frac{1}{\alpha}, 0, 1\right) \right\}$$



la matriz asociada al producto escalar del que procede q es

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} \end{pmatrix}$$