



Ejercicio 1 En $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $\mathcal{B}_c = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, y la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (5, 3, 1), \vec{v}_2 = (1, -3, 2), \vec{v}_3 = (1, 2, 1)\}$. Sea la aplicación lineal: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como sigue: $f(\vec{v}_1) = (-2, 1, 0)$, $f(\vec{v}_2) = (-1, 3, 0)$, $f(\vec{v}_3) = (-2, -3, 0)$. Se pide: Calcúlese la matriz A de f tomando las bases $\mathcal{B}$ en el espacio inicial y la canónica en el final, la matriz M de f , tomando la base canónica en el espacio inicial y en el final y la matriz N de f tomando la base canónica en el espacio inicial y $\mathcal{B}$ en el espacio final.

SOLUCIÓN:

Dado que ya nos dan las imágenes de los vectores de la base $\mathcal{B}$ respecto de la base canónica, directamente la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con respecto a la matriz M debemos hacer el cambio de base. Conocemos los vectores de la base $\mathcal{B}$ respecto de la base canónica, así que tomando como base nueva $\mathcal{B}$ y como base antigua la canónica, se tiene que la matriz de cambio de base es:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz relaciona las coordenadas X de un vector de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica con las coordenadas X' del mismo vector respecto de la base $\mathcal{B}$ como sigue: $X = PX'$. Observa que esta relación se puede plantear como una aplicación lineal (llamada habitualmente aplicación lineal de cambio de base) $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3$ que transforma el vector X' en $X = PX'$. Esto nos lleva a poder escribir el siguiente diagrama conmutativo, que relaciona las matrices de una aplicación lineal en distintas bases, a partir de las matrices de los cambios de base que se realiza:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3 \\ P \downarrow & \curvearrowright & \downarrow I \\ \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3 & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3 \end{array}$$

De donde la relación entre las matrices es: $M = IAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 19 \\ 7 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Para calcular N observemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3 \\ P \downarrow & \curvearrowright & \uparrow P \\ \mathbb{R}_{\mathcal{B}_c}^3 & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^3 \end{array}$$

De donde $N = P^{-1}AP^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 60 & -95 \\ 25 & -84 & 133 \\ 68 & -228 & 361 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2 Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida como sigue:

$$f(1, 1, 1, 1) = 1 + 2x + x^3 = f(0, 1, 1, 1), \quad f(0, 0, 1, 1) = -1 + 3x + 2x^2 + 3x^3, \quad f(0, 0, 0, 1) = 1 - 2x + x^3$$

Se pide:

a) Matriz de la aplicación f en las bases canónicas.



b) Base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas del $\ker(f)$.

c) Base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas del $\Im(f)$.

d) $T^{-1} \langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle$

e) $T^{-1}\{x^3, x^2 + 2x^3\}$

SOLUCIÓN:

a) Conocemos la matriz de la aplicación lineal en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ $\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2, x^3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

En las bases canónicas de ambos espacios se cumpliría:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_3[x]_{\mathcal{B}_c} \\ P \downarrow & \text{curved arrow} & \downarrow I \\ \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}_c} & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}_3[x]_{\mathcal{B}_c} \end{array}$$

$$\text{donde } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y la matriz pedida es } M = IAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular el núcleo, es suficiente resolver el sistema homogéneo:

$$MX = [0] \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolverlo, calculemos la escalonada reducida asociada a M :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\begin{matrix} F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 + 3F_3 \\ F_1 + 2F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/8} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_1 - 5F_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Las ecuaciones paramétricas coincidirían con las soluciones paramétricas del sistema homogéneo: $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ que

nos lleva a la base $\{(1, 0, 0, 0)\}$ y a las ecuaciones implícitas: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

c) Para calcular una base del conjunto $\mathfrak{S}(f)$ recordemos que un sistema generador es $f(\mathcal{B}_c)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3/8} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de $\mathfrak{S}(f)$ sería: $1 - 2x + x^3, x + 2x^2 + 4x^3, x^2 + 2x^3$ Unas ecuaciones paramétricas las obtendríamos como sigue:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(1, -2, 0, 1) + \beta(0, 1, 2, 4) + \delta(0, 0, 1, 2) \rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha + \beta \\ x_3 = 2\beta + \delta \\ x_4 = \alpha + 4\beta + 2\delta \end{cases}$$

y a partir de ellas se obtienen unas ecuaciones implícitas: de la primera ecuación $\alpha = x_1$; de la segunda ecuación $\beta = x_2 + 2\alpha = x_2 + 2x_1$; de la tercera $\delta = x_3 - 2\beta = x_3 - 2(x_2 + 2x_1) = -4x_1 - 2x_2 + x_3$. Llevando estos resultados a la cuarta ecuación obtenemos la ecuación única implícita:

$$x_4 = x_1 + 4(x_2 + 2x_1) + 2(-4x_1 - 2x_2 + x_3) \rightarrow \boxed{x_1 + 2x_3 - x_4 = 0}$$

d) Recordemos quién es $T^{-1} \langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle$. Escribiendo los vectores del conjunto final en coordenadas tendríamos:

$$x^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x^2 + 2x^3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y los elementos de $T^{-1} \langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle$ son aquellos vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas en la base canónica (x, y, z, t) son solución del sistema de ecuaciones lineales con 2 parámetros:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \beta \\ 0 & -2 & 2 & 1 & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \beta \\ 0 & -2 & 2 & 1 & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$



El sistema sólo tiene solución si $\alpha = 0$, luego sólo los polinomios de $\langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle$ que sean proporcionales a $x^2 + 2x^3$ tendrán antiimagen. Continuamos la resolución tomando $\alpha = 0$

$$\xrightarrow[\substack{F_2+3F_3 \\ F_1+2F_3}]{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & 0 & 2\beta \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \xrightarrow{F_2/8} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 5 & 0 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+5F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8}\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto los vectores de $\mathbb{R}^4$ que están en la antiimagen pedida cumplen las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x = \delta \\ y = -\frac{1}{8}\beta \\ z = \frac{3}{8}\beta \\ t = \beta \end{array} \right\}$$

Es decir:

$$T^{-1}\langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle = \left\langle (1, 0, 0, 0), \left(0, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, 1\right) \right\rangle$$

- e) Ahora debemos calcular la antiimagen de 2 vectores, no de las combinaciones lineales de ambos, por lo tanto, y teniendo en cuenta que ambos están en el subespacio del apartado anterior, y que $x^3 = 1x^3 + 0(x^2 + 2x^3)$ (es decir, en este caso $\alpha = 1$ y $\beta = 0$), y que $x^2 + 2x^3 = 0x^3 + 1(x^2 + 2x^3)$ (es decir, en este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 1$), se tiene

$$T^{-1}(x^3) = \emptyset; \quad T^{-1}(x^2 + 2x^3) = \left\{ \left(\delta, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, 1 \right) / \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Por lo que

$$T^{-1}\{x^3, x^2 + 2x^3\} = \left\{ \left(\delta, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, 1 \right) / \delta \in \mathbb{R} \right\}$$