



Ejercicio 1 Haga los pasos siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Sistema} & (1) & (2) & \text{Ecuaciones} & (3) \\ \text{generador} & \xrightarrow{(6)} & \text{Base} & \xrightarrow{(5)} & \text{paramétricas} & \xrightarrow{(4)} & \text{Ecuaciones} \\ & & & & & & \text{implícitas} \end{array}$$

con el subespacio de $\mathbb{R}^5$

$$U = \langle (1, 1, 1, 1, 1), (2, -1, 2, -3, 1), (3, 0, 3, -3, 1), (1, 1, 1, 0, 0) \rangle$$

obteniendo de esta forma las distintas descripciones de U

SOLUCIÓN: Sistema generador $\xrightarrow{(1)}$ Base

Cada vector se coloca como fila de una matriz, y se pasa a una matriz escalonada. Las filas no nulas de la matriz escalonada constituyen una base del subespacio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - 2F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se elimina la última fila, que es nula y se obtiene la base siguiente:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, -3, 0, -5, -1), (0, 0, 0, 1, 1)\}$$

Base $\xrightarrow{(2)}$ Ecuaciones paramétricas

Se escribe un elemento genérico como combinación lineal de la base y se obtienen las ecuaciones:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \alpha_1(1, 1, 1, 1, 1) + \alpha_2(0, -3, 0, -5, -1) + \alpha_3(0, 0, 0, 1, 1)$$

y unas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 \\ x_5 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas $\xrightarrow{(3)}$ Ecuaciones implícitas

Se eliminan los parámetros hasta obtener un sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_1 - 3\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 \\ x_5 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

De la ecuación primera obtenemos

$$\alpha_1 = x_1$$



de la segunda

$$\alpha_2 = \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$$

y de la quinta:

$$\alpha_3 = x_5 - \alpha_1 + \alpha_2 = x_5 - x_1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_5$$

llevando estos resultados a las ecuaciones 3 y 4, que son las que no hemos utilizado aún, obtendremos 2 ecuaciones implícitas de U :

$$\left. \begin{array}{l} x_3 = x_1 \\ x_4 = \alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = x_1 - \frac{5}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

Ecuaciones implícitas $\xrightarrow{(4)}$ Ecuaciones paramétricas

Se resuelve el sistema homogéneo y se escribe la solución en forma paramétrica:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

Se construye la matriz ampliada del sistema y se calcula la escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 / -6} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

Las variables principales son x_1 y x_2 , luego las variables que pasan a ser parámetros son: x_3, x_4 y x_5 :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\delta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \delta \end{array} \right\}$$

Ecuaciones paramétricas $\xrightarrow{(5)}$ Base

A partir de las ecuaciones paramétricas se reconstruye un vector genérico como combinación lineal de una base:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\alpha, \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\delta, \alpha, \beta, \delta \right) = \alpha \left(1, \frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right) + \beta \left(0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0 \right) + \delta \left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right)$$

una base sería:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(1, \frac{2}{3}, 1, 0, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0 \right), \left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1 \right) \right\}$$

Base $\xrightarrow{(6)}$ Sistema generador

Este paso es trivial, ya que toda base es un sistema generador.

Ejercicio 2 Calcúlese una base de la suma y una de la intersección de los subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{U}_1 = \langle \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1), \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1) \rangle$$

$$\mathcal{U}_2 = \langle \vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 0, 0, 0) \rangle$$



SOLUCIÓN: Colocamos cada vector como la fila de una matriz y hacemos operaciones elementales con ellos, hasta obtener una matriz escalonada:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ \vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1) \\ \vec{v}_3 = (1, 0, 0, 0) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ \vec{v}_1 - \vec{u}_1 = (0, -1, -1, -1) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 = (0, 1, 0, 0) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 = (0, 0, -1, -1) \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ \vec{v}_1 - \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (0, 0, 0, 0) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (0, 0, -1, -1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 = (0, 0, -1, -1) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 0, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ -\vec{v}_3 + \vec{u}_1 = (0, 0, 1, 1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (0, 0, 0, 0) \\ \vec{v}_1 - \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (0, 0, 0, 0) \end{array} \right\}$$

y una base de la suma son las filas no nulas de la escalonada obtenida:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2} = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$$

Para obtener una base de la intersección observamos las filas nulas obtenidas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_3 - \vec{u}_1 - \vec{v}_2 + \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0} \\ \vec{v}_1 - \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = -\vec{u}_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \\ \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \end{array} \right\}$$

por lo que tenemos un sistema generador de la intersección:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2} = \{-\vec{u}_2 = (0, -1, -1, -1), \vec{v}_1 = (1, -1, 0, 0)\}$$

Dado que el sistema es libre, se trata de una base de la intersección.