



Ejercicio 1 En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(5, 3, 1), (1, -3, -2), (1, 2, 1)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(-2, 1, 0), (-1, 3, 0), (-2, -3, 1)\}$$

calcule la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

SOLUCIÓN:

Para calcular la matriz asociada debemos calcular las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_2$ respecto de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$, es decir, debemos calcular los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} (-2, 1, 0) &= a_{11}(5, 3, 1) + a_{21}(1, -3, -2) + a_{31}(1, 2, 1) = (5a_{11} + a_{21} + a_{31}, 3a_{11} - 3a_{21} + 2a_{31}, a_{11} - 2a_{21} + a_{31}) \\ (-1, 3, 0) &= a_{12}(5, 3, 1) + a_{22}(1, -3, -2) + a_{32}(1, 2, 1) = (5a_{12} + a_{22} + a_{32}, 3a_{12} - 3a_{22} + 2a_{32}, a_{12} - 2a_{22} + a_{32}) \\ (-2, -3, 1) &= a_{13}(5, 3, 1) + a_{23}(1, -3, -2) + a_{33}(1, 2, 1) = (5a_{13} + a_{23} + a_{33}, 3a_{13} - 3a_{23} + 2a_{33}, a_{13} - 2a_{23} + a_{33}) \end{aligned}$$

Esto se reduce a la resolución de tres sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} -2 &= 5a_{11} + a_{21} + a_{31} \\ 1 &= 3a_{11} - 3a_{21} + 2a_{31} \\ 0 &= a_{11} - 2a_{21} + a_{31} \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} -1 &= 5a_{12} + a_{22} + a_{32} \\ 3 &= 3a_{12} - 3a_{22} + 2a_{32} \\ 0 &= a_{12} - 2a_{22} + a_{32} \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} -2 &= 5a_{13} + a_{23} + a_{33} \\ -3 &= 3a_{13} - 3a_{23} + 2a_{33} \\ 1 &= a_{13} - 2a_{23} + a_{33} \end{aligned} \right\}$$

Los tres tienen en común la matriz de coeficientes, de forma que podemos resolverlos simultáneamente sin más que encontrar la matriz escalonada reducida de:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Las columnas 4, 5 y 6 de la escalonada reducida será la matriz buscada.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & -1 & -7 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 3F_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -17 & -36 & 46 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 36 & -45 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hemos resuelto los tres sistemas simultáneamente, las soluciones serían:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -5 & a_{21} &= 6 & a_{31} &= 17 \\ a_{12} &= -10 & a_{22} &= 13 & a_{32} &= 36 \\ a_{13} &= 12 & a_{23} &= -17 & a_{33} &= -45 \end{aligned}$$

por lo que la matriz de cambio de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ es

$$P = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 12 \\ 6 & 13 & -17 \\ 17 & 36 & -45 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 2 En el $\mathbb{R}$ –espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran dos bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1, 0, 1), \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \vec{u}_3 = (0, 0, 1)\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

Si la matriz de cambio de base, tomando como base nueva la base $\mathcal{B}_2$ y como base antigua $\mathcal{B}_1$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Puedes calcular los vectores de la base $\mathcal{B}_2$?

SOLUCIÓN:

Las columnas de la matriz P son las coordenadas en la base antigua de los vectores de la base nueva, es decir,

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1, 0, 1) + 2(1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (3, 2, 0) \\ \vec{v}_2 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1, 0, 1) + (1, 1, 0) - (0, 0, 1) = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_3 &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 2(1, 0, 1) + (1, 1, 0) + (0, 0, 1) = (3, 1, 3)\end{aligned}$$