



Teorema 1 (Ley de la balanza de Arquímedes) *Dos masas en una balanza se equilibran cuando sus pesos son inversamente proporcionales a sus distancias al punto de apoyo.*

Ejercicio 1 *Calcule los pesos w_1 , w_2 , w_3 y w_4 para equilibrar las balanzas de la figura:*

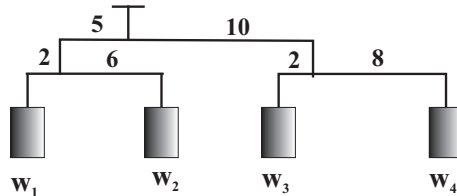


Figura 1: equilibrio de pesos

¿Cuáles deben ser estos pesos si debemos usar una pesa de 2gr?

Solución:

Para equilibrar las dos balanzas pequeñas utilizando la ley de Arquímedes se deben verificar las ecuaciones:

$$2w_1 = 6w_2$$

$$2w_3 = 8w_4$$

Para equilibrar la balanza principal se necesita que:

$$5(w_1 + w_2) = 10(w_3 + w_4)$$

y de esta forma llegamos al sistema:

$$\left. \begin{array}{cccc} 2w_1 & -6w_2 & & = 0 \\ & 2w_2 & -8w_4 & = 0 \\ 5w_1 & +5w_2 & -10w_3 & -10w_4 = 0 \end{array} \right\}$$

que es un sistema *homogéneo*. La matriz asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 5 & 5 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$



y su escalonada reducida se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \\ 5 & 5 & -10 & -10 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{F_1/2 \\ F_2/2 \\ F_3/5}]{\substack{F_1/2 \\ F_2/2 \\ F_3/5}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3/2} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

obteniendo la solución paramétrica:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{15}{2}\lambda \\ w_2 &= \frac{5}{2}\lambda \\ w_3 &= 4\lambda \\ w_4 &= \lambda \end{aligned} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0$$

Para que una de las pesas pese 2gr debe ocurrir:

Si es $w_1 = 2$ entonces, $\lambda = \frac{4}{15}$ de donde $w_2 = \frac{2}{3}$, $w_3 = \frac{16}{15}$ y $w_4 = \frac{4}{15}$.

Si es $w_2 = 2$ entonces $\lambda = \frac{4}{5}$, de donde $w_1 = 6$, $w_3 = \frac{16}{5}$ y $w_4 = \frac{4}{5}$.

Si es $w_3 = 2$ entonces, $\lambda = \frac{1}{2}$ de donde $w_1 = \frac{15}{4}$, $w_3 = \frac{5}{4}$ y $w_4 = \frac{1}{2}$.

Si es $w_4 = 2$ entonces, $\lambda = 2$ de donde $w_1 = 15$, $w_2 = 8$ y $w_3 = 8$.