



Ejercicio 1 Se considera el sistema de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & (1+\alpha^2)x_3 & = & 2\alpha \\ x_1 & + & & + & (1-\alpha)x_3 & = & -\alpha \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha^2 x_3 & = & \alpha \end{array} \right\} \quad (1)$$

1. Escribe la matriz ampliada, y encuentra una matriz escalonada asociada a dicha matriz
2. Analiza para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución.
3. Para los valores encontrados en el apartado anterior, decide si el sistema tiene solución única o no.
4. Resuelve el sistema para los valores encontrados en el segundo apartado

SOLUCIÓN:

1. La matriz ampliada asociada al sistema (1) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1+\alpha^2 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 1-\alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{array} \right)$$

Para calcular la matriz escalonada realizaremos operaciones elementales por filas:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1+\alpha^2 & 2\alpha \\ 1 & 0 & 1-\alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{array} \right) & \xrightarrow[\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-2 \\ 0 & -1 & -\alpha & -\alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha & -\alpha-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha-1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\substack{F_4-F_3 \\ (-1)F_2}]{F_4-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se han encuadrado los posibles pivotes de la matriz escalonada. Veamos los distintos casos:

Si $\alpha = 1$, entonces el elemento 4, 4 de la matriz no es pivote, la matriz obtenida en este caso es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

que es escalonada.

Si $\alpha = -1$, entonces el elemento 3, 3 es cero y en consecuencia no es pivote, y la matriz obtenida en este caso es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

no es escalonada, la escalonada en este caso es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se han encuadrado los pivotes.



Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, entonces la matriz dada es escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2 - 1} & 2\alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha - 1} \end{array} \right)$$

2. Para ver los valores de α para los cuales el sistema tiene solución, debemos estudiar los distintos casos que obtuvimos en el apartado anterior, para estudiar las distintas matrices escalonadas:

Si $\alpha = 1$ entonces la matriz escalonada era

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

donde se han encuadrado los pivotes. Como la columna de términos independientes no es columna de pivote, en este caso el sistema tiene solución.

Si $\alpha = -1$ entonces la matriz escalonada asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se han encuadrado los pivotes. Como la columna de términos independientes es columna de pivote, el sistema no tiene solución.

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ entonces la matriz escalonada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \alpha & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha^2 - 1} & 2\alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\alpha - 1} \end{array} \right)$$

Se han encuadrado los pivotes. En este caso la columna de términos independientes es columna de pivotes, por lo que el sistema no tiene solución.

De esta forma, el sistema sólo tiene solución para $\alpha = 1$.

3. En el único caso en el que tiene solución es para $\alpha = 1$, en cuyo caso la matriz escalonada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como hay una columna de la matriz de coeficientes que no es de pivote (la tercera columna) el sistema no tiene solución única.

4. Vamos a calcular la matriz escalonada reducida, para proceder después a la resolución:

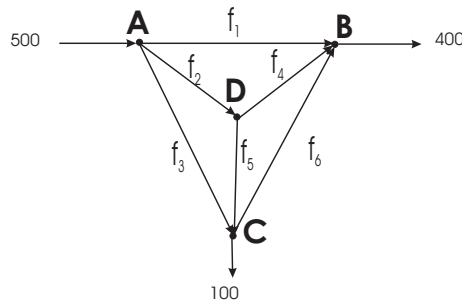
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$



Observemos que las variables principales son las dos primeras, x_1 y x_2 , ya que son las columnas 1 y 2 las de pivote, mientras que la tercera columna corresponde a una variable secundaria, o de parámetro. Así tendremos la solución paramétrica siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 - \delta \\ x_3 = \delta \end{array} \right\} \forall \delta \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2 En el diagrama adjunto se muestra una red de calles de un solo sentido. La tasa de coches que fluyen de la intersección A es de 500 coches por hora, de las intersecciones B y C emergen 400 y 100 coches por hora respectivamente. Encontrar los posibles flujos que recorren cada calle.



Si se quiere que el flujo de la calle 4, f_4 , sea máximo ¿qué flujos saldrían en el resto de las calles?

SOLUCIÓN:

Vamos a encontrar una ecuación por cada intersección, teniendo en cuenta la ecuación de equilibrio que implica que el número de coches que llega a la intersección debe ser idéntico al número de coches que se van de la intersección, esto nos lleva al sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 500 = f_1 + f_2 + f_3 \\ 400 = f_1 + f_4 + f_6 \\ 100 = f_3 + f_5 + f_6 \\ f_2 = f_4 + f_5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f_1 + f_2 + f_3 = 500 \\ f_1 + f_4 + f_6 = 400 \\ f_3 + f_5 + f_6 = 100 \\ -f_2 + f_4 + f_5 = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

La matriz ampliada asociada al sistema es la siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Calculemos la matriz escalonada reducida asociada al problema:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4 - F_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array} \right) \xrightarrow{F_5} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_4} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$



$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)F_2}$$

Obteniendo la matriz escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right)$$

Los elementos encuadrados son los pivotes, y corresponden a las columnas 1, 2, 3 y 6, por lo que las variables principales son f_1 , f_2 , f_3 y f_6 , siendo las secundarias o parámetros las variables f_4 y f_5 , así podemos dar la siguiente solución paramétrica al sistema (2) será:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 400 - \alpha \\ f_2 = \alpha + \beta \\ f_3 = 100 - \beta \\ f_4 = \alpha \\ f_5 = \beta \\ f_6 = 0 \end{array} \right\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Esta solución es la solución, como ya dijimos, del problema (2), pero nuestro problema real es otro, ya que los flujos deben ser números enteros y positivos, por lo tanto, y utilizando la solución (3) vamos a poner las restricciones $f_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, 6$:

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \geq 0 \rightarrow 400 - \alpha \geq 0 \\ f_2 \geq 0 \rightarrow \alpha + \beta \geq 0 \\ f_3 \geq 0 \rightarrow 100 - \beta \geq 0 \\ f_4 \geq 0 \rightarrow \alpha \geq 0 \\ f_5 \geq 0 \rightarrow \beta \geq 0 \\ f_6 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq \alpha \leq 400 \\ 0 \leq \beta \leq 100 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 399, 400\}, \quad \beta \in \{0, 1, 2, \dots, 99, 100\} \quad (4)$$

Por último, si queremos que f_4 sea máximo y dado que por (4), $f_4 = \alpha \in \{0, 1, 2, \dots, 399, 400\}$, se tendría

$$\left. \begin{array}{l} f_1 = 0 \\ f_2 = 400 + \beta \\ f_3 = 100 - \beta \\ f_4 = 400 \\ f_5 = \beta \\ f_6 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \forall \beta \in [0, 100] \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 99, 100\}$$

Ejercicio 3 Se considera un sistema lineal de 3 ecuaciones y 5 incógnitas, con matriz ampliada $(A|b)$ y matriz de coeficientes A , En cada caso, probar que la afirmación dada es cierta, o dar un contraejemplo que demuestre que es falsa.

1. Si el sistema es compatible, hay más de una solución..
2. Si la matriz escalonada asociada a A tiene 3 filas no nulas, el sistema es compatible.
3. Si la matriz escalonada asociada a $(A|b)$ tiene 2 filas no nulas, el sistema es compatible.
4. Si la matriz escalonada asociada a A tiene 2 filas no nulas, el sistema es compatible.

SOLUCIÓN:



1. Verdadero, ya que la matriz de coeficientes es 3×5 , así que, al menos 2 columnas no serían de pivote (hay a lo sumo 3 pivotes), y esto implica que el sistema tiene más de una solución (al menos hay 2 variables secundarias, lo que implica que habría al menos 2 parámetros en la solución)
2. Verdadero, ya que no quedarían filas para otro pivote, en consecuencia la columna de términos independientes no puede ser columna de pivote.
3. Verdadero, ya que no quedarían filas para otro pivote, en consecuencia la columna de términos independientes no puede ser columna de pivote.
4. Falso, véase por ejemplo el sistema siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Con matriz asociada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Calculemos la matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Evidentemente, la matriz tiene dos filas no nulas, pero el sistema es incompatible

5. Falso, véase por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Con matriz asociada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Calculemos la matriz escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right)$$

La matriz escalonada asociada a A tiene 2 filas no nulas, pero el sistema es incompatible, dado que la columna de términos independientes es de pivote.