



Apellidos:	Nombre:	NIF:
------------	---------	------

Ejercicio 1 Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ una aplicación lineal definida en las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2 = \{1 + x + 2x^2, 1 + x + x^2, 2 + x - x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula la matriz asociada a f en las bases canónicas
- Calcula la dimensión, una base, unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones paramétricas del subespacio $\text{Im}(f)$
- Calcula la dimensión, una base, unas ecuaciones implícitas y unas ecuaciones paramétricas del subespacio $\ker(f)$
- Calcula, en caso de que exista $f^{-1}\langle 1 + x + 2x^2, 1 + x + x^2 \rangle$
- ¿Existe algún vector de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea $1 - x$? Razona tu respuesta.

Solución:

- a) La matriz de cambio de base en $\mathbb{R}^3$, considerando como base antigua la base canónica y como base nueva la base $\mathcal{B}_1$ es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_1} \\ X \end{matrix} \xrightarrow[\sim]{P} \begin{matrix} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_c} \\ PX \end{matrix}$$

La matriz de cambio de base en $\mathbb{R}_2[x]$, considerando como base antigua la base canónica y como base nueva la base $\mathcal{B}_2$ es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbb{R}_2[x]_{\mathcal{B}_2} \\ Y \end{matrix} \xrightarrow[\sim]{Q} \begin{matrix} \mathbb{R}_2[x]_{\mathcal{B}_c} \\ QY \end{matrix}$$

Por lo que:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_2[x]_{\mathcal{B}_2} \\ \downarrow P & \curvearrowright & \downarrow Q \\ \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_c} & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}_2[x]_{\mathcal{B}_c} \end{array}$$

se tiene que la matriz pedida es $M = QAP^{-1}$ y

$$M = \begin{pmatrix} 24 & 29 & -59 \\ 15 & 21 & -36 \\ 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Para calcular una base de la imagen, recordemos que un sistema generador es la imagen de una base cualquiera, es decir

$$\begin{aligned}
 Im(f) &= \langle (2, 4, -6)_{\mathcal{B}_2}, (5, 7, 3)_{\mathcal{B}_2}, (-3, -4, 1)_{\mathcal{B}_2} \rangle \\
 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 5 & 7 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{F_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-5F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 18 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/(-3)} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

por lo que el sistema es libre, y en consecuencia es una base de $Im(f)$, por lo tanto $\dim(Im(f)) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$. Una base puede ser:

$$\mathcal{B}_c = \{1, x, x^2\}$$

No tiene ecuaciones implícitas, ya que si hubiese restricciones no tendría dimensión máxima. Unas paramétricas serían, dado un polinomio genérico $p(x) = a + bx + cx^2$:

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha \\ b &= \beta \\ c &= \delta \end{aligned} \right\}, \quad \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$$

- c) Por el teorema del rango, se tiene que

$$3 = \dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Im(f)) + \dim(\ker(f)) \rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$$

Por lo que no tiene base, y sus ecuaciones paramétricas, o implícitas son, dado un vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- d) $f^{-1}\langle 1+x+2x^2, 1+x+x^2 \rangle = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1+x+2x^2) + \beta(1+x+x^2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
 Para poder aplicar la matriz A , debemos escribir los polinomios dados como combinación lineal de la base $\mathcal{B}_2$:

$$1+x+2x^2 = (1, 1, 2)_{\mathcal{B}_c} = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}_2}$$

$$1+x+x^2 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}_c} = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}_2}$$

Por lo que, para resolver este apartado, debemos resolver el sistema lineal siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 7 & -4 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para ello calculamos la matriz ampliada y su matriz escalonada reducida:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & \alpha \\ 4 & 7 & -4 & \beta \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[F_3+3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & \alpha \\ 0 & -3 & 2 & -2\alpha + \beta \\ 0 & 18 & -8 & 3\alpha \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & \alpha \\ 0 & -3 & 2 & -2\alpha + \beta \\ 0 & 0 & 4 & -9\alpha + 6\beta \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F_3/4} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & \alpha \\ 0 & -3 & 2 & -2\alpha + \beta \\ 0 & 0 & 1 & -9\alpha/4 + 3\beta/2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_1+3F_3]{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -23\alpha/4 + 9\beta/2 \\ 0 & -3 & 0 & 5\alpha/2 - 2\beta \\ 0 & 0 & 1 & -9\alpha/4 + 3\beta/2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2/(-3)} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & -23\alpha/4 + 9\beta/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5\alpha/6 + 2\beta/3 \\ 0 & 0 & 1 & -9\alpha/4 + 3\beta/2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1-5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -19\alpha/12 + 7\beta/6 \\ 0 & 1 & 0 & -5\alpha/6 + 2\beta/3 \\ 0 & 0 & 1 & -9\alpha/4 + 3\beta/2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1/2}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -19\alpha/24 + 7\beta/12 \\ 0 & 1 & 0 & -5\alpha/6 + 2\beta/3 \\ 0 & 0 & 1 & -9\alpha/4 + 3\beta/2 \end{array} \right)$$

Por lo tanto:

$$f^{-1} \langle 1+x+2x^2, 1+x+x^2 \rangle = \left\langle -\frac{19}{24} - \frac{5}{6}x - \frac{9}{4}x^2, \frac{7}{12} + \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}x^2 \right\rangle$$

- e) Sí, ya que la aplicación es suprayectiva, y todo elemento del conjunto final es imagen de algún elemento del inicial, en particular el polinomio dado.

Ejercicio 2 En la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ se tiene la siguiente forma cuadrática

$$q_\alpha(x, y, z) = 2x^2 + 4xy + \alpha y^2 - 2xz + z^2$$

- a) Decir para qué valores de α es q_α un cuadrado escalar.
b) Eligiendo el menor $\alpha \in \mathbb{R}$ para el que q_α es un cuadrado escalar, calcular una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vectores ortogonales de $\mathbb{R}^3$ que diagonalice q_α .
c) Calcular la proyección ortogonal de $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sobre $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$.

Solución:

- a) Utilizando el método de Gauss

$$\begin{aligned} q_\alpha(x, y, z) &= 2x^2 + 4xy + \alpha y^2 - 2xz + z^2 = 2(x^2 + 2xy - xz) + \alpha y^2 + z^2 = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 + \alpha y^2 + z^2 = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 - 2y^2 - \frac{z^2}{2} + 2yz + \alpha y^2 + z^2 = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + (\alpha - 2)y^2 + 2yz + \frac{z^2}{2} = \{\alpha > 2\} \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + (\alpha - 2)\left(y^2 + \frac{2}{\alpha - 2}yz\right) + \frac{z^2}{2} = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + (\alpha - 2)\left(y + \frac{1}{\alpha - 2}z\right)^2 - \frac{1}{\alpha - 2}z^2 + \frac{z^2}{2} = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + (\alpha - 2)\left(y + \frac{1}{\alpha - 2}z\right)^2 - \frac{1}{\alpha - 2}z^2 + \frac{z^2}{2} = \\ &= 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + (\alpha - 2)\left(y + \frac{1}{\alpha - 2}z\right)^2 + \frac{\alpha - 4}{2(\alpha - 2)}z^2 \end{aligned}$$

A la vista del resultado del método de Gauss, la forma cuadrática es un cuadrado escalar si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2 > 0 \\ \wedge \\ \frac{\alpha - 4}{2(\alpha - 2)} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 2 \\ \wedge \\ \alpha > 4 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha > 4$$

En la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la matriz asociada a la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) El menor $\alpha \in \mathbb{N}$ para el que q_α es un cuadrado escalar es $\alpha = 5$. Para este valor la forma cuadrática es

$$q(x, y, z) = 2\left(x + y - \frac{z}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}z\right)^2 + \frac{1}{6}z^2$$

y haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} X = x + y - \frac{1}{2}z \\ Y = y + \frac{1}{3}z \\ Z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = X - Y + \frac{5}{6}Z \\ y = Y - \frac{1}{3}Z \\ z = Z \end{cases}$$

queda

$$q(X, Y, Z) = 2X^2 + 3Y^2 + \frac{1}{6}Z^2$$

Se cumple que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo P la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de vectores ortogonales, en la que la matriz asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

por tanto

$$D = P^t A P$$

y

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{v}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{v}_3 = \frac{5}{6}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

- c) La proyección ortogonal de $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ sobre $\langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ es $\vec{p} = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3$. Para calcularla se tiene en cuenta que $\vec{w} - \vec{p} \in \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle^\perp$, es decir que

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\vec{w} - \vec{p}) \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ (\vec{w} - \vec{p}) \cdot \vec{v}_3 = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{v}_2 = \vec{p} \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{w} \cdot \vec{v}_3 = \vec{p} \cdot \vec{v}_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{v}_2 = (\alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3) \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{w} \cdot \vec{v}_3 = (\alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3) \cdot \vec{v}_3 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_2^2 = \alpha\vec{v}_2^2 \\ 0 = \beta\vec{v}_3^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{p} = \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Una granja avícola de Gijón cria pollos de tres tamaños: pequeño, mediano y grande a los que se alimenta con tres tipos de piensos sin dioxina. Cada pollo pequeño consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pollo mediano consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pollo grande, el promedio semanal de consumo es 2 unidades del alimento 1, 1 del 2 y 5 del 3. Cada semana se proporcionan a la granja 25000 unidades del alimento 1, 20000 del 2 y 55000 del 3. Si se supone que los pollos comen todo el alimento. Se quiere saber:

- a) ¿Qué relación hay entre el número de pollos pequeños, medianos y grandes que pueden coexistir en la granja?
- b) ¿Podría haber una población de 6 000 pollos grandes? ¿Y una población de 4 000 del mismo tamaño?
- c) ¿Cuál es la población máxima y mínima de pollos de cada tamaño? ¿De qué tamaño puede haber el mayor número de animales?
- d) Sin variar los hábitos alimenticios de los pollos, ¿Existe algún modo de que el número de pollos de cada tamaño sea independiente del de los demás?
- e) Considerando el conjunto A formado por los vectores solución del sistema planteado, calcular una base de $\langle A \rangle$. ¿Todos los elementos de $\langle A \rangle$ pueden representar poblaciones de pollos de la granja?

Solución:

- a) Llamando x al número de pollos pequeño, y al número de pollos medianos y z al número de pollos grandes, se cumple

$$\begin{cases} 25000 = x + 3y + 2z \\ 20000 = x + 4y + z \\ 55000 = 2x + 5y + 5z \end{cases}$$

que se resuelve por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25000 \\ 1 & 4 & 1 & 20000 \\ 2 & 5 & 5 & 55000 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & -1 & 1 & 5000 \end{array} \right)$$

que proporciona un sistema equivalente que da una relación entre el número de pollos pequeños, medianos y grandes que pueden coexistir en la granja

$$\begin{cases} 25000 = x + 3y + 2z \\ -5000 = y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 40000 - 5z \\ y = z - 5000 \end{cases}$$

- b) Una población de 6000 pollos grandes equivale a hacer $z = 6000$, con lo que $y = 1000$ y $x = 10000$, es decir habría 1000 pollos medianos y 10000 pollos pequeños. Pero una población de 4000 pollos grandes no es posible porque para ello debería haber una población negativa de pollos medianos, lo que es imposible.
- c) La población máxima de pollos grandes es de 5000, lo que haría mínima (nula) la población de pollos medianos y la población de pollos pequeños con 15000 ejemplares. El mayor número de animales corresponde a la población de pollos pequeños, con una población mínima de 15000 y una población máxima de 40000 que supondría una población nula de pollos grandes.
- d) No. Se trata de un sistema compatible indeterminado y la población de dos tamaños de pollos depende de la cantidad de pollos del tercer tamaño.
- e) El conjunto A de los vectores genéricos cuyas coordenadas son las poblaciones de pollos pequeños, medianos y grandes respectivamente relacionadas como se dijo en el primer apartado es

$$A = \{(x, y, z) \mid x = 40000 - 5z, y = z - 5000\}$$

No es un subespacio vectorial ya que el vector nulo no pertenece a A .

El conjunto A es

$$A = \{(40000 - 5z, z - 5000, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{(40000, -5000, 0) + z(-5, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

El conjunto $\langle A \rangle$ es

$$\langle A \rangle = \langle (40000, -5000, 0), (-5, 1, 1) \rangle = \{ \alpha (40000, -5000, 0) + \beta (-5, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

y una base es

$$\{(40000, -5000, 0), (-5, 1, 1)\}$$

No todos los elementos de $\langle A \rangle$ pueden representar poblaciones de pollos de la granja, como se puede apreciar en las combinaciones lineales

$$\alpha (40000, -5000, 0) + \beta (-5, 1, 1)$$

Por ejemplo, con $\beta = 0$ y α cualquiera no estaría representada una población de pollos, al igual que con $\alpha = 0$ y β cualquiera.