



Apellidos:	Nombre:	NIF:
------------	---------	------

Cuestión 1 (1 punto) *Enuncia los siguientes resultados:*

- a) *Teorema de la representación única*
- b) *Teorema del rango*
- c) *Teorema de Pitágoras en espacios euclídeos*
- d) *Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización.*

Solución:

- a) Teorema de la representación única

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del $\mathbb{K}$ -espacio V , entonces, para cada $\vec{u} \in V$ existe un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{u}$$

- b) Teorema del rango

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, y sea $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ una aplicación lineal, entonces:

$$\dim(\mathcal{U}) = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f)$$

- c) Teorema de Pitágoras en espacios euclídeos

Sea $(E, \cdot)$ un espacio euclídeo, si $\vec{v}$ e $\vec{w}$ son dos vectores ortogonales de E entonces

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

- d) Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización.

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con $\dim(V) = n$, y sea $T: V \rightarrow V$ un endomorfismo, entonces T es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. El polinomio característico se descompone por completo en el cuerpo base, es decir:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{n_p} \quad n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$$

2. Los subespacios propios verifican la condición siguiente:

$$\dim S(\lambda_i) = n_i \quad \forall i$$

Cuestión 2 (1 punto) *Clasifica, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, la cónica de ecuación:*

$$ax^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$$

Solución:

La matriz asociada a la cónica y su determinante son

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = \det(A) = \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}$$

Como

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \delta = \det(A_{33}) = a, \quad s = \text{traza}(A_{33}) = a + 1$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } \delta = 0 \text{ Tipo Parábola} & \begin{cases} \Delta = 0 \text{ Par de rectas paralelas} \\ \Delta \neq 0 \text{ Parábola} \end{cases} \\ \text{Si } \delta > 0 \text{ Tipo Elipse} & \begin{cases} \Delta = 0 \text{ Un punto} \\ \Delta \neq 0 \text{ Una elipse} \end{cases} \begin{cases} s\Delta > 0 \text{ Elipse imaginaria} \\ s\Delta < 0 \text{ Elipse real} \end{cases} \\ \text{Si } \delta < 0 \text{ Tipo Hipérbola} & \begin{cases} \Delta = 0 \text{ Par de rectas que se cortan} \\ \Delta \neq 0 \text{ Hipérbola} \end{cases} \end{array} \right.$$

se tiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } a = 0 \text{ Género Parábola} & (\text{Parábola}) \\ \text{Si } a > 0 \text{ Género Elipse} & \begin{cases} a = \frac{1}{3} \text{ Un punto} \\ a \neq \frac{1}{3} \text{ Una elipse} \end{cases} \begin{cases} a > \frac{1}{3} \text{ Elipse imaginaria} \\ a < \frac{1}{3} \text{ Elipse real} \end{cases} \\ \text{Si } a < 0 \text{ Género Hipérbola} & (\text{Hipérbola}) \end{array} \right.$$

Cuestión 3 (1 punto) En $\mathbb{R}^3$, calcula el giro de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en torno a la recta $x = y = z$ en sentido antihorario visto desde el punto $(1, 1, 1)$. Calcula la matriz asociada a dicho giro en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

Solución:

Un vector director de la recta es $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y su suplemento ortogonal es el plano $x + y + z = 0$, así que una base de $\mathbb{R}^3$ en la que un vector pertenezca a la recta y los otros dos al plano indicados es

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$$

A partir de ella se calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ utilizando el método de ortogonalización de Schmidt. Primero se obtiene la base ortogonal $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ tal que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (1, 1, 1) \\ \vec{v} &= (1, 0, -1) \\ (0, 1, -1) &= \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, -1) + \vec{w}, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{(0, 1, -1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} = 0 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)} = \frac{1}{2}$$

Luego la base ortogonal es

$$\mathcal{B}_{ort} = \left\{ (1, 1, 1), (1, 0, -1), \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

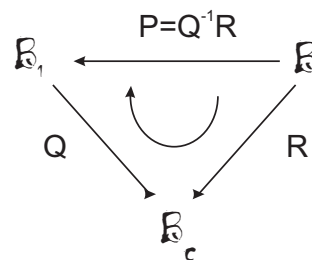
y la base ortonormal

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

En la base $\mathcal{B}_1$, la matriz del giro es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

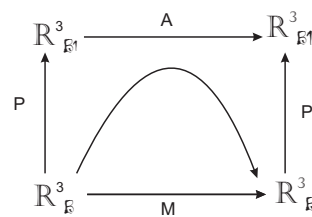
y teniendo en cuenta el siguiente esquema de cambio de base



donde $\mathcal{B}_c$ representa la base canónica, R la matriz de cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}$, Q la matriz de cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}_1$ y P la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}$, se cumple $P = Q^{-1}R$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Entonces, teniendo en cuenta el siguiente esquema de cambio de base



donde M es la matriz del giro en la base dada $\mathcal{B}$, se cumple

$$M = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Cuestión 4 (1 punto) La matriz asociada a un endomorfismo T de $\mathbb{R}^3$ en una cierta base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Se pide:

- Decir si el endomorfismo es diagonalizable, justificando la respuesta con los argumentos teóricos utilizados.
- En caso de ser diagonalizable, calcular una base de vectores propios que permita la diagonalización.
- Decir si existe algún valor de a tal que el subespacio propio asociado, $S(a)$, sea invariante. En este caso, decir cómo sería un vector propio genérico invariante.

Solución:

- a) Calculamos los valores propios de A como raíces de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 0 & a - \lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= (a - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{pmatrix} = \\ &= -(\lambda + a)(\lambda - a)^2 \end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda_1 = -a, \lambda_2 = a \text{ doble}$$

así que se calculan los subespacios para cada uno de ellos.

Para el valor propio a doble, se tiene

$$A - aI = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

y el subespacio propio asociado es

$$S(a) = \text{Ker}(A - aI) = \{(x, y, z) \mid -x + z = 0\} = \langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

y como a es un valor propio doble, el endomorfismo es diagonalizable porque $\dim S(1) = 2$, que es el orden de multiplicidad del valor propio correspondiente en el polinomio característico.

Un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ es diagonalizable si y sólo si:

- Todos sus valores propios son reales.
- La dimensión del subespacio asociado a cada uno de los valores propios es igual al orden de multiplicidad del valor propio correspondiente en el polinomio característico.

- b) Puesto que en el primer apartado se ha calculado una base de vectores propios para el valor propio a , se calcula ahora una base del subespacio propio asociado al valor propio $-a$. Se tiene

$$A + aI = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

y el subespacio propio asociado al valor propio $-a$ es

$$S(-a) = \text{Ker}(A + aI) = \{(x, y, z) \mid x + z = 0, y = 0\} = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

Se cumple

$$S(-a) \oplus S(a) = \mathbb{R}^3$$

y una base de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ es

$$\{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$$

en la que la matriz asociada al endomorfismo es

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 1$, se cumple que $S(1)$ es invariante y los vectores propios invariantes tienen la forma

$$\alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) = (\beta, \alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ya que para $a = 1$, la matriz asociada al endomorfismo es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se cumple

$$M \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$