



Cuestión 1 (1 punto) Se considera V , un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión n , y W un subespacio vectorial de V , demuestra que $\dim(W) \leq \dim(V)$. Demuestra también que si $\dim(W) = n$, entonces $W = V$.

Por reducción al absurdo, si $\dim W \geq \dim V$ existiría una base de W , que sería un sistema libre de V , con más vectores que una base de V , lo que contradice el teorema fundamental de la independencia, por lo que queda demostrado que $\dim(W) \leq \dim(V)$.

Si $\dim W = n$, por reducción al absurdo supongamos que $W \neq V$, por lo que existiría $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} \notin W$, por lo que al añadir a una base de W dicho vector obtendríamos un sistema libre de V con más vectores que su dimensión, lo que contradice el teorema fundamental de la independencia, y $W = V$.

Cuestión 2 (1 punto) Sea V espacio euclídeo, $T: V \rightarrow V$ un operador ortogonal, demuestra que si λ es un valor propio de T , entonces $\lambda \in \{1, -1\}$

Supongamos que $\vec{v}$ es un vector propio asociado al operador ortogonal T , con valor propio asociado λ , entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = T(\vec{v}) \cdot T(\vec{v}) = \lambda^2 \vec{v} \cdot \vec{v} \xrightarrow{\vec{v} \neq \vec{0}} \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

Cuestión 3 (1 punto) Sea $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la simetría respecto del plano $x - y + z = 0$, calcula la matriz asociada a S respecto de la base canónica.

Construimos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por dos vectores del plano y un tercer vector ortogonal al plano.

$$\pi = \langle \vec{v}_1 = (1, 0, -1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1) \rangle$$

Aplicando el método de ortogonalización de Schmidt, se busca una base de vectores ortogonales $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tales que

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 0, -1)$$

$$\vec{v}_2 = \alpha \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \quad \text{con} \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0$$

siendo

$$\alpha = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} = -\frac{1}{2}$$

con lo que

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \alpha \vec{u}_1 = (0, 1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) = \frac{1}{2}(1, 2, 1)$$

y una base ortonormal del plano es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1) \right\}$$

Un vector ortogonal al plano es el $(1, -1, 1)$, así que una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ como la citada anteriormente es

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right\}$$

Respecto de la base $\mathcal{B}$, la matriz asociada a S es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el esquema de cambio de base

$$\begin{array}{ccccc} S & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \mathcal{B}_c & \xrightarrow{B} & \mathcal{B}_c \\ & & P \mid & & \mid P \\ & & \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B} \end{array}$$

se cumple que $B = PAP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Cuestión 4 (0.5 puntos) Se considera la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla los valores enteros de α para que G sea la matriz de un producto escalar.

Aplicando el criterio de Sylvester, G es la matriz de un producto escalar si y sólo si todos los menores angulares son positivos, lo que conduce a que

$$\det(G) > 0 \rightarrow -2\alpha^2 + 2\alpha + 1 > 0 \rightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 < 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

para obtener los puntos de corte de la parábola con el eje α .

Para que G es la matriz de un producto escalar debe cumplirse que $2\alpha^2 - 2\alpha - 1 < 0$, es decir, $\alpha \in \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right]$ y, como queremos valores enteros en ese intervalo, $\alpha \in \{0, 1\}$.