



Cuestión 1 (1 punto) Define suma e intersección de subespacios vectoriales. Demuestra con un contraejemplo que la unión de subespacios no es, en general, un subespacio. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$\mathcal{U} = \langle (1, 1, -1, 3), (0, -2, 0, 1) \rangle; \quad \mathcal{V} = \langle (0, 1, 0, 4), (1, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 1) \rangle$$

calcula una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de la suma $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ y de la intersección $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

SOLUCIÓN:

Definición de suma:

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y U y W dos subespacios vectoriales suyos, llamaremos suma de U y W al subespacio:

$$U + W = \{ \vec{v} \in V / \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \text{ con } \vec{u} \in U, \vec{w} \in W \}$$

y llamaremos intersección de U y W al subespacio:

$$U \cap W = \{ \vec{v} \in V / \vec{v} \in U, \vec{v} \in W \}$$

vamos a calcular una base de la suma y de la intersección de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{u}_2 = (0, -2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{v}_2 = (1, 0, 0, 2) \\ \vec{v}_3 = (1, 1, 1, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{u}_2 = (0, -2, 0, 1) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 = (0, -1, 1, -1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 = (0, 0, 2, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{u}_2 = (0, -2, 0, 1) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 = (0, -1, 1, -1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 = (0, 0, 2, -2) \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{u}_2 + 2\vec{v}_1 = (0, 0, 0, 9) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = (0, 0, 1, 3) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 = (0, 0, 2, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = (0, 0, 1, 3) \\ (\vec{u}_2 + 2\vec{v}_1)/9 = (0, 0, 0, 1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 - 2(\vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1) = (0, 0, 0, -8) \end{array} \right\} \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{u}_1 = (1, 1, -1, 3) \\ \vec{v}_1 = (0, 1, 0, 4) \\ \vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = (0, 0, 1, 3) \\ (\vec{u}_2 + 2\vec{v}_1)/9 = (0, 0, 0, 1) \\ \vec{v}_3 - \vec{u}_1 - 2(\vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1) + 8(\vec{u}_2 + 2\vec{v}_1)/9 = (0, 0, 0, 0) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ por lo que no tiene ecuaciones implícitas, las paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \delta \\ t = \lambda \end{array} \right\} \forall \alpha, \beta, \delta, \lambda \in \mathbb{R}$$

y una base es, por ejemplo, la base canónica.

Con respecto a la intersección, se tiene que:

$$\vec{v}_3 - \vec{u}_1 - 2(\vec{v}_2 - \vec{u}_1 + \vec{v}_1) + \frac{8}{9}(\vec{u}_2 + 2\vec{v}_1) = \vec{0} \rightarrow 9\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + 18\vec{v}_2 - 9\vec{v}_3 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$$

Por lo que una base de $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ sería $(9, -7, -9, 35)$, unas ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 9\alpha \\ y = -7\alpha \\ z = -9\alpha \\ t = 35\alpha \end{array} \right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

y despejando α en la primera ecuación paramétrica y sustituyendo en las demás tendríamos:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 9y = 0 \\ x + z = 0 \\ 35x - 9t = 0 \end{array} \right\}$$

Cuestión 2 (1.25 puntos) Se consideran U y V dos $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, $\mathcal{S} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un sistema de vectores de U y $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal, demuestra o niega con un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

- a) Si $\mathcal{S}$ es ligado, entonces $f(\mathcal{S})$ es ligado
- b) Si $\mathcal{S}$ es libre, entonces $f(\mathcal{S})$ es libre
- c) Si f es biyectiva y $\mathcal{S}$ es libre, entonces $\vec{0}_V \notin f(\mathcal{S})$

SOLUCIÓN:

- a) Verdadero. Si $\mathcal{S}$ es ligado, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos y tales que

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \vec{0}_U \rightarrow f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V = \alpha_1 f(\vec{u}_1) + \dots + \alpha_n f(\vec{u}_n)$$

Por lo tanto $f(\mathcal{S})$ es ligado.

- b) Falso. Vamos a ver un contraejemplo. En $U = \mathbb{R}^3$ y $V = \mathbb{R}^2$ se define la aplicación siguiente:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad / \quad f(x, y, z) = (x + y, z)$$

Se toma $\mathcal{S} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ que es libre, su imagen es: $f(\mathcal{S}) = \{(1, 0), (1, 0), (0, 0)\}$ ligado, ya que se repite un vector o ya que contiene al vector nulo.

- c) Verdadero. Si f es biyectiva, entonces, supongamos por reducción al absurdo que $\vec{0}_V \in f(\mathcal{S})$, entonces existe un vector de $\mathcal{S}$ cuya imagen es $\vec{0}$, lo que implica que dicho vector pertenece al $\ker(f)$, como la aplicación es biyectiva, es inyectiva, por lo que $\ker(f) = \{\vec{0}\}$, de donde $\mathcal{S}$ contendría al vector $\vec{0}$, lo que contradice que $\mathcal{S}$ sea un sistema libre.

Cuestión 3 (1.25 puntos) En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar habitual y el operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que en la base canónica tiene asociada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Demuestra que T es una composición de un giro con una simetría. Calcula una base en la que la matriz asociada a T sea la reducida canónica. ¿Cuál sería el eje del giro? ¿y el plano de la simetría? (no es necesario que calcules el ángulo de giro)

SOLUCIÓN:

Para demostrar que se trata de la composición de un giro y una simetría hay que comprobar que se trata de una transformación ortogonal inversa, para ello es suficiente probar que $A^t A = I$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora probaremos que es ortogonal inverso, es decir, que su determinante es -1 .

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 - 2F_3 \\ F_1 - 2F_3}}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(-4 + 1) = -1$$

Para calcular una base ortonormal en la que la matriz asociada sea la reducida canónica necesitamos un vector asociado al valor propio -1 , es decir, necesito un vector que verifique el sistema homogéneo: $(A + I)X = [0]$:

$$\begin{aligned} A + I &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1/3 \\ F_2/3 \\ F_3/3}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1}} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\neq 2]{F_3/(-12)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, vector de $S(-1)$ podría ser $(0, -1, 2)$, y como debe ser unitario $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Completamos con dos vectores ortogonales y que sean ortogonales a el dado, es decir, el primero debe verificar:

$$(x, y, z) \cdot (0, -1, 2) = 0 \quad -y + 2z = 0$$

y un vector ortogonal al dado puede ser: $(1, 0, 0)$, que es unitario. Para calcular el último debemos exigir que sea ortogonal a los dos, es decir:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (0, -1, 2) &= 0 \quad -y + 2z = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) &= 0 \quad x = 0 \end{aligned}$$

luego podemos elegir $(0, 2, 1)$, y unitario debe ser unitario: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y una base ortonormal en la que la matriz asociada sea la reducida canónica puede ser:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$$

la simetría sería respecto del plano: $\left\langle (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle$ y el eje del giro sería: $\left\langle \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle$