



Ejercicio 1 (1.5 puntos) Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ el endomorfismo definido como sigue:

$$T(a, b) = b + (a + b)x + ax^2$$

- a) Hallar la matriz de la aplicación lineal respecto de las bases canónicas
- b) Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$, y $\mathcal{B}_2 = \{x, x^2 + 1, x - x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$. Hallar la matriz de T respecto de dichas bases.
- c) Hallar $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$, ¿es T biyectiva? razona la respuesta.
- d) ¿Es $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) + T^{-1}(\langle x^2 - 1 \rangle)$ suma directa? en caso afirmativo ¿Es $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) \oplus T^{-1}(\langle x^2 - 1 \rangle) = \mathbb{R}^2$?

a) Calculamos las imágenes de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y las expresamos en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= x + x^2 \\ T(0, 1) &= 1 + x \end{aligned}$$

La matriz de la aplicación lineal en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Según el esquema de cambio de base

$$\begin{array}{ccccc} T & : & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}_2[x] \\ & & \mathcal{B}_{c1} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{B}_{c2} \\ & & P \mid & & \mid Q \\ & & \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}_2 \end{array}$$

donde P es la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{B}_1$, Q es la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ a $\mathcal{B}_2$ y B es la matriz de la aplicación en las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$, se cumple

$$B = Q^{-1}AP$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

queda

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Se define

$$\ker(T) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 / T(\vec{v}) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / A(x, y) = 0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = 0$$

luego

$$\ker(T) = \{(0, 0)\}$$

y la aplicación es inyectiva.

Un sistema generador de $\text{Im}(T)$ son las columnas de la matriz asociada a la aplicación en una base cualquiera, entonces

$$\text{Im}(T) = \langle (0, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle$$

y como son dos vectores linealmente independientes, constituyen una base de $\text{Im}(T)$.

T no puede ser suprayectiva porque $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}_2[x]$. Por tanto, T no es biyectiva.

d) Definimos $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$

$$T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 / T(\vec{v}) \in \langle x + x^2 \rangle\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / A(x, y) \in \langle x + x^2 \rangle\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = \alpha \\ x = \alpha \end{cases}$$

con lo que

$$T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) = \langle (1, 0) \rangle$$

Definimos $T^{-1}(\langle x^2 - 1 \rangle)$

$$T^{-1}(\langle x^2 - 1 \rangle) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 / T(\vec{v}) \in \langle x^2 - 1 \rangle\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / A(x, y) \in \langle x^2 - 1 \rangle\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} y = -\alpha \\ x + y = 0 \\ x = \alpha \end{cases}$$

con lo que

$$T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) = \langle (-1, 1) \rangle$$

Por tanto $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) + T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$ es directa si la unión de una base de $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$ y una base de $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$ es una base de $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) + T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$. En este caso, $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) \oplus T^{-1}(\langle x^2 - 1 \rangle) = \mathbb{R}^2$ ya que una base de $T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle) + T^{-1}(\langle x + x^2 \rangle)$ es también base de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2 (2 puntos) Se estudia el movimiento de una partícula cada 0,01 segundos, obteniendo la siguiente relación entre la posición en dos lecturas consecutivas:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + \frac{3}{2}y_n + \frac{3}{2}z_n \\ y_{n+1} &= -\frac{3}{2}x_n - 2y_n - \frac{3}{2}z_n \\ z_{n+1} &= \frac{3}{2}x_n + \frac{3}{2}y_n + z_n \end{cases}$$

- a) Calcula, en caso de que existan, todas las posiciones iniciales para las cuales la partícula permanece parada.
- b) Calcula, en caso de que existan, todas las posiciones iniciales que hagan que la posición de la partícula tienda hacia el origen.
- c) Calcula en qué posición se encontrará la partícula al cabo de 1,5 segundos, si la posición inicial era $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.
- d) Si la posición inicial es $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ ¿a qué posición tiende a largo plazo la partícula?
- a) Podemos expresar matricialmente la relación entre las dos lecturas consecutivas de la partícula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \longrightarrow X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \dots A^n X_0$$

Para que la partícula permanezca invariante, X_0 debe ser un vector propio de A asociado al valor propio 1, calculemos los valores propios:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{C_1-C_2}{=} \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}+\lambda & \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{F_3+F_1}{=} \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{5}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 3 & \frac{5}{2}-\lambda \end{pmatrix} \underset{C_1-C_2}{=} \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}+\lambda & \frac{5}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{=} \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 (1-\lambda) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz sí tiene el valor propio 1. Calculemos $S(1) = \{X / (A - I)X = [0]\}$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_2/3]{2F_1/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, Las ecuaciones implícitas de $S(1)$ son $x = z$, $y = -z$, y $S(1) = \langle (1, -1, 1) \rangle$. Las posiciones pedidas serían $(\alpha, -\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

b) El único valor propio menor que 1 es el $-\frac{1}{2}$, así que calculamos $S\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$A + \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y unas ecuaciones de $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ serían $x + y + z = 0$. Las posiciones pedidas serían:

$$\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \quad / \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

c) Al cabo de 1,5 segundos habríamos efectuado $n = \frac{1,5}{0,01} = 150$ lecturas.

Como $X_0 = (1, 0, -1) \in S\left(-\frac{1}{2}\right)$ se tiene que

$$A^{150}X_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{150}X_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{150} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{150}} \\ 0 \\ -\frac{1}{2^{150}} \end{pmatrix}$$

d) Como $X_0 = (1, 1, 1) \in S(1)$, $A^n X_0 = X_0$, por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n X_0 = X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 (1 punto) En $\mathbb{R}^3$ se considera el subespacio $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ y la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

a) Determinar la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ sobre H

b) Hallar una base ortonormal $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ que contenga dos vectores de H y expresar la proyección de $\vec{v}$ respecto de $\mathcal{B}'$

a) Calculamos una base del subespacio H

$$H = \langle \vec{u}_1 = (1, 0, -1), \vec{u}_2 = (0, 1, -1) \rangle$$

La proyección ortogonal $\vec{p}$ del vector $\vec{v}$ sobre el subespacio H cumple que

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 \in H \\ \vec{v} - \vec{p} &\in H^\perp \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = \vec{p} \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = \vec{p} \cdot \vec{u}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 = \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 = \alpha \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \beta \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{cases}$$

que escrito matricialmente, queda

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

luego

$$\vec{p} = \frac{1}{3}(1, 0, -1) + \frac{1}{3}(0, 1, -1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

- b) Calculamos una base ortonormal $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ a partir de una base de H . Para ello aplicamos el método de ortogonalización de Schmit a una base de $\mathbb{R}^3$ compuesta por dos vectores de H y otro elegido arbitrariamente (Teorema de la base incompleta)

$$\{\vec{u}_1 = (1, 0, -1), \vec{u}_2 = (0, 1, -1), \vec{u}_3 = (0, 0, 1)\}$$

Elegimos

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = (1, 0, -1)$$

y hacemos

$$\vec{u}_2 = \alpha \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

siendo

$$\alpha = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{1}{2}$$

con lo que

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \alpha \vec{v}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Procediendo de manera análoga

$$\vec{u}_3 = \gamma \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0 \text{ y } \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

siendo

$$\gamma = \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

con lo que

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \gamma \vec{v}_1 - \beta \vec{v}_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$$

y la base pedida es

$$\mathcal{B}' = \left\{ \vec{v}_1 = (1, 0, -1), \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right), \vec{v}_3 = \frac{1}{3}(1, 1, 1) \right\}$$

Calculamos los coeficientes de la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre H en la base $\mathcal{B}'$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \alpha(1, 0, -1) + \beta\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) + \gamma\frac{1}{3}(1, 1, 1)$$

que se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma \\ \frac{1}{3} = \beta + \frac{1}{3}\gamma \\ -\frac{2}{3} = -\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Luego, la proyección en la base $\mathcal{B}'$ es $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0\right]$.