



Ejercicio 1 En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se considera la aplicación siguiente:

$$q \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = 2x^2 + ay^2 + 2z^2 + at^2 + 2xt + 2yz$$

- Utiliza el método de Gauss para calcular los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales q es un cuadrado escalar
- Para los valores de a calculados en el apartado anterior, da unas ecuaciones de cambio de base que diagonalicen el producto escalar asociado a q
- Para los valores de a calculados en el apartado a), da una base ortogonal del $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, considerando el producto escalar asociado a q
- Sea a el número natural más pequeño que hace que q sea un producto escalar, da una base ortonormal del $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, considerando el producto escalar asociado a q
- Calcula la proyección ortogonal de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sobre el subespacio $\mathcal{U} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

SOLUCIÓN:

- En primer lugar, observamos que los coeficientes de las coordenadas al cuadrado deben ser estrictamente positivos, por lo que $a > 0$.

$$\begin{aligned} q \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= 2x^2 + ay^2 + 2z^2 + at^2 + 2xt + 2yz = 2(x^2 + xt) + ay^2 + 2z^2 + at^2 + 2yz = \\ &= 2 \left(x + \frac{t}{2} \right)^2 + ay^2 + 2z^2 + \left(a - \frac{1}{2} \right) t^2 + 2yz = 2 \left(x + \frac{t}{2} \right)^2 + 2(z^2 + yz) + ay^2 + \left(a - \frac{1}{2} \right) t^2 = \\ &= 2 \left(x + \frac{t}{2} \right)^2 + 2 \left(z + \frac{y}{2} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{2} \right) y^2 + \left(a - \frac{1}{2} \right) t^2 \end{aligned}$$

por lo tanto, para que q sea un cuadrado escalar debe cumplirse que $a > \frac{1}{2}$

- Las ecuaciones del cambio inverso son:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x + \frac{1}{2}t \\ \bar{y} &= z + \frac{1}{2}y \\ \bar{z} &= y \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \right\}$$

y las del cambio efectuado son:

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{t} \\ y &= \bar{z} \\ z &= \bar{y} - \frac{1}{2}\bar{z} \\ t &= \bar{t} \end{aligned} \right\}$$

c) A partir de las ecuaciones del cambio de base, se obtiene que la matriz del cambio de base es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que una base ortogonal sería:

$$\mathcal{B}_{ortog} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) La base ortonormal se obtiene a partir de la base ortogonal, dividiendo cada vector por su longitud.

Como $a > \frac{1}{2}$ tomamos en este apartado $a = 1$. A partir de la nueva expresión de q :

$$q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})_{\mathcal{B}_{ortog}} = 2\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + \frac{1}{2}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}\bar{t}^2$$

Por lo tanto

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}, \quad \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que una base ortonormal es:

$$\mathcal{B}_{orton} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Para calcular la proyección ortogonal debemos calcular la matriz del producto escalar en la base canónica:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

La proyección es una matriz $\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que cumpla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + M \quad M \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1, 1, 2, -1)_{\mathcal{B}_c} = \alpha(0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}_c} + \vec{u}$$

con $\vec{u}$ una matriz ortogonal a cualquier matriz de $\mathcal{U}$. Para resolver el problema multiplicaremos escalarmente la igualdad por $(0, 1, 1, 0)$ obteniendo el valor de α :

$$(1, 1, 2, -1) \cdot (0, 1, 1, 0) = \alpha(0, 1, 1, 0)$$

Calculando los productos:

$$(1, 1, 2, -1) \cdot (0, 1, 1, 0) = (1, 1, 2, -1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 + a$$

$$(0, 1, 1, 0) \cdot (0, 1, 1, 0) = (0, 1, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 + a$$

Por lo que el sistema que debemos resolver es:

$$7 + a = 4 + a\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{7 + a}{4 + a}$$

y la proyección buscada es:

$$proy_{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7 + a}{4 + a} \\ \frac{7 + a}{4 + a} & 0 \end{pmatrix}$$

(Obsérvese que, dado que $a > \frac{1}{2}$, $\frac{7 + a}{4 + a} > 0$, como debe ser, ya que es un cuadrado escalar)

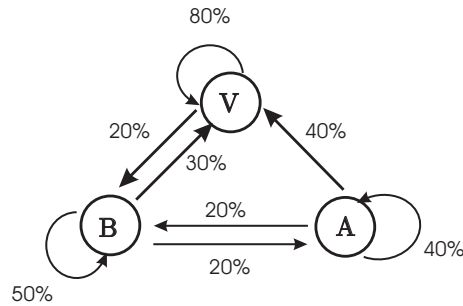
Ejercicio 2 Una agencia de aviación tiene su flota de aviones distribuida entre los aeropuertos de Barcelona, Asturias y Valencia. De los barcos que el día 1 de cada mes están en Barcelona, el 1 del siguiente mes sólo están la mitad, un 20 % se va a Asturias y el resto a Valencia. De los aviones que están el 1 de cada mes en Asturias, el 1 del mes siguiente un 20 % estará el 1 del mes siguiente en Barcelona, un 40 % a Valencia y el resto estará en Asturias. Análogamente, de los aviones que había en Valencia el 1 de cada mes, un 80 % regresará al mismo aeropuerto el 1 del mes siguiente, mientras que el resto se dirige a Barcelona. Suponiendo que el número de aviones es constante:

- Plantea de forma matricial la relación entre el número inicial de aviones en cada ciudad y el número de aviones que habrá en el mes n -ésimo.
- Sabiendo que inicialmente la compañía dispone de 210 aviones, encuentre una situación inicial que haga que el número de aviones en cada ciudad permanezca constante con el paso de los meses.
- Suponiendo que inicialmente se dispone de 350 aviones en Barcelona, 500 en Asturias y 650 en Valencia, ¿cuál sería la tendencia a largo plazo?

SOLUCIÓN:

- El esquema que describe la transferencia de aviones entre dos meses consecutivos es:

Llamando A_n al número de aviones que están en Asturias en el mes n , V_n al número de aviones en Valencia, también en el mes n , y B_n al número de aviones en Barcelona en el mismo mes, las



ecuaciones que rigen el problema son:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{40}{100}A_{n-1} + \frac{20}{100}B_{n-1} \\ V_n &= \frac{40}{100}A_{n-1} + \frac{80}{100}V_{n-1} + \frac{30}{100}B_{n-1} \\ B_n &= \frac{20}{100}A_{n-1} + \frac{20}{100}V_{n-1} + \frac{50}{100}B_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

que se puede representar matricialmente como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_n \\ V_n \\ B_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{40}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ V_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

de forma que:

$$X_n = MX_{n-1} = M(MX_{n-2}) = M^2X_{n-2} = \dots M^n X_0$$

así que para encontrar las relaciones pedidas, debemos calcular la potencia n -ésima de M , para ello la diagonalizaremos.

Paso1: Cálculo del polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \frac{40}{100} - \lambda & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} - \lambda & -\frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & 0 & \frac{30}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{40}{100} - \lambda \right) \left(\frac{30}{100} - \lambda \right) \end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo del espectro:

$$\sigma(M) = \left\{ 1, \frac{40}{100}, \frac{30}{100} \right\}$$

Paso 3: Cálculo de los subespacios propios:

$$S(1) = \{X / (M - 1I)X = [0]\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - I$:

$$\begin{aligned} M - I &= \begin{pmatrix} -\frac{60}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2+F_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \leftrightarrow F_3}]{F_1'} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \\ 0 & -\frac{60}{100} & \frac{130}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 10_2]{10F_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -13 \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2/6} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 6 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\alpha \\ y &= \frac{13}{6}\alpha \\ z &= \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Por lo que } S(1) = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, 1 \right) \right\rangle$$

$$S\left(\frac{40}{100}\right) = \left\{ X / \left(M - \frac{40}{100}I \right) X = [0] \right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - \frac{40}{100}I$:

$$\begin{aligned} M - \frac{40}{100}I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} & \frac{30}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_3} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ 0 & 0 & \frac{10}{100} \\ 0 & 0 & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[10F_3]{10F_1/2, 10F_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_2}]{F_1-F_2/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Por lo que $S\left(\frac{40}{100}\right) = \langle(-1, 1, 0)\rangle$

$$S\left(\frac{30}{100}\right) = \left\{X/\left(M - \frac{30}{100}I\right) X = [0]\right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - \frac{30}{100}I$:

$$\begin{aligned} M - \frac{30}{100}I &= \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2+F_3} = \begin{pmatrix} \frac{70}{100} & \frac{70}{100} & \frac{70}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{10F_1/7} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-20/100F_1]{F_2-40/100F_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{10}{100} & -\frac{10}{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{10F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= -2\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= \alpha \end{aligned} \right\}$$

Por lo que $S\left(\frac{30}{100}\right) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

Por lo tanto

$$X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{40}{100}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{30}{100}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ V_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

b) Se nos pide una situación estable, es decir, una situación inicial asociada al valor propio 1, entonces:

$$210 = \alpha \frac{1}{3} + \alpha \frac{13}{6} + \alpha, \quad \alpha = 210 \frac{6}{21} = 60$$

por lo tanto, originalmente habrá 20 aviones en Asturias, 130 en Valencia y 60 en Barcelona

c) Nos piden el límite de X_n , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ \frac{13}{6} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{40}{100}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{30}{100}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ \frac{13}{6} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 500 \\ 650 \\ 350 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 500 \\ 650 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, en las bases canónicas tiene asociada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Calcula en caso de que exista un valor del parámetro a para que $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$
- b) Para el valor calculado en el apartado a), da una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas del núcleo
- c) Calcula la matriz asociada a f respecto de las bases:
- $$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, -1, 1)\}; \quad \mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\}$$
- d) Calcula un valor de a para el cual la primera columna de la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_1$ en $\mathbb{R}^4$ y la canónica de $\mathbb{R}^3$ sea $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN:

- a) Calcularemos, según los valores de a la $\dim(\operatorname{Im} f)$, para ello calcularemos el rango de las columnas de A , que son las imágenes de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & a-2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{F_3 + 2F_2 \\ F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Para que $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$, debe cumplirse que $a = 1$.

- b) Para $a = 1$, calcularemos el núcleo, que se define como $\ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^4 / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$, es decir, debemos resolver el sistema homogéneo de ecuaciones lineales cuya matriz asociada es A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 \\ F_2/3}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, unas ecuaciones implícitas del núcleo serían:

$$\left. \begin{array}{l} x + \frac{7}{3}z + \frac{1}{3}t \\ y - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t \end{array} \right\}$$

unas ecuaciones paramétricas del núcleo serían:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\frac{7}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{array} \right\}$$

y una base sería:

$$\mathcal{B}_{\ker(f)} = \left\{ \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0 \right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1 \right) \right\}$$

c) Plantearemos en primer lugar las matrices de cambio de base:

- En $\mathbb{R}^4$ conocemos los vectores de $\mathcal{B}_1$ en función de la canónica, luego la base canónica será la base antigua. La matriz de cambio de base es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}_c} \\ X' & \longrightarrow & X = QX' \end{array}$$

- En $\mathbb{R}^3$ conocemos los vectores de $\mathcal{B}_2$ en función de la canónica, luego la base canónica será la base antigua. La matriz de cambio de base es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_2} & \xrightarrow{P} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_c} \\ Y' & \longrightarrow & Y = PY' \end{array}$$

Para calcular la matriz pedida, utilizaremos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} f: \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}_c} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_c} & & \\ \uparrow Q & \curvearrowright & \uparrow P & \rightarrow & M = P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 - \frac{a}{3} & \frac{16}{3} & -3 & \frac{a}{3} - 6 \\ \frac{a}{3} - 1 & \frac{2}{3} & -1 & -1 - \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} + 5 & -\frac{16}{3} & 8 & 11 - \frac{a}{3} \end{pmatrix} \\ \mathbb{R}^4_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}_2} & & \end{array}$$

d) La primera columna de la matriz pedida sería las coordenadas de la imagen del primer vector de la base, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 + a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 4 + a = 3 \\ a = -1 \end{array}$$