

NOMBRE:

Nº:

TEORÍA

1. Si $U_1 = \langle (1, 2, 1, 2), (0, 1, 1, 1), (2, 3, 2, 3) \rangle$ y $U_2 = \langle (3, 6, 5, 6), (1, 1, 1, 0), (2, 5, 3, 1) \rangle$ son dos subespacios de $\mathbb{R}^4$, calcular una base de cada uno de los siguientes subespacios $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$. ¿Es $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$? ¿Y $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$? Contestar razonadamente.

SOLUCIÓN

Calculamos una base de U_1 a partir de su sistema generador, aplicando el método de Gauss a los generadores de U_1 para obtener sistemas equivalentes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathcal{B}_{U_1} = \{\vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2), \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1), \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0)\}$$

Calculamos una base de U_2 a partir de su sistema generador, aplicando el método de Gauss a los generadores de U_2 para obtener sistemas equivalentes

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 3F_2]{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\mathcal{B}_{U_2} = \{\vec{q}_1 = (1, 1, 1, 0), \vec{q}_2 = (0, 3, 1, 1), \vec{q}_3 = (0, 0, 1, 5)\}$$

Calculamos una base de $U_1 + U_2$ a partir de su sistema generador (formado al unir una base de U_1 con una base de U_2), aplicando el método de Gauss a los generadores de $U_1 + U_2$ para obtener sistemas equivalentes. Simultáneamente obtendremos una base de $U_1 \cap U_2$

$$\begin{array}{lll} \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2) & \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2) & \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2) \\ \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1) & \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1) & \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0) & \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0) & \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \vec{q}_1 = (1, 1, 1, 0) & \sim \vec{q}_1 - \vec{p}_1 = (0, -1, 0, -2) & \sim \vec{q}_1 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (0, 0, 1, -1) \\ \vec{q}_2 = (0, 3, 1, 1) & \vec{q}_2 = (0, 3, 1, 1) & \vec{q}_2 - 3\vec{p}_2 = (0, 0, -2, -2) \\ \vec{q}_3 = (0, 0, 1, 5) & \vec{q}_3 = (0, 0, 1, 5) & \vec{q}_3 - \vec{p}_3 = (0, 0, 0, 5) \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{lll} \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2) & & \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2) \\ \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1) & & \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1) \\ \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0) & & \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0) \\ \vec{q}_1 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 = (0, 0, 0, -1) & \sim & \vec{q}_1 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 + \frac{1}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = (0, 0, 0, 0) \\ \vec{q}_2 - 3\vec{p}_2 + 2\vec{p}_3 = (0, 0, 0, -2) & & \vec{q}_2 - 3\vec{p}_2 + 2\vec{p}_3 + \frac{2}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = (0, 0, 0, 0) \\ \frac{1}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = (0, 0, 0, 1) & & \frac{1}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = (0, 0, 0, 1) \end{array}$$

entonces

$$\mathcal{B}_{U_1+U_2} = \left\{ \vec{p}_1 = (1, 2, 1, 2), \vec{p}_2 = (0, 1, 1, 1), \vec{p}_3 = (0, 0, 1, 0), \frac{1}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = (0, 0, 0, 1) \right\}$$

y

$$\begin{cases} \vec{q}_1 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 + \frac{1}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = \vec{0} \\ \vec{q}_2 - 3\vec{p}_2 + 2\vec{p}_3 + \frac{2}{5}(\vec{q}_3 - \vec{p}_3) = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{q}_1 + \frac{1}{5}\vec{q}_3 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 + \frac{6}{5}\vec{p}_3 \\ \vec{q}_2 + \frac{2}{5}\vec{q}_3 = 3\vec{p}_2 - \frac{8}{5}\vec{p}_3 \end{cases}$$

Así que

$$\mathcal{B}_{U_1 \cap U_2} = \left\{ \vec{q}_1 + \frac{1}{5}\vec{q}_3 = \left(1, 1, \frac{6}{5}, 1\right), \vec{q}_2 + \frac{2}{5}\vec{q}_3 = \left(0, 3, \frac{7}{5}, 3\right) \right\}$$

2. Probar que si T es un endomorfismo entonces cumple que

$$T \text{ inyectivo} \leftrightarrow T \text{ biyectivo} \quad \text{y} \quad T \text{ suprayectivo} \leftrightarrow T \text{ biyectivo}$$

SOLUCIÓN:

Demostrado en clase

3. Demostrar que si T es un operador simétrico, los subespacios propios asociados a valores propios distintos son ortogonales.

SOLUCIÓN:

Demostrado en clase

PROBLEMAS

1. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que, en las bases canónicas, tiene asociada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Se pide:

- Calcular, en caso de que exista, un valor del parámetro a para que $\dim(\text{Im} f) = 2$.
- Para el valor calculado en el apartado anterior, dar una base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de $\text{Ker} f$.
- Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, -1, -1)\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\}$$

- Calcular un valor de a para el cual la primera columna de la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y canónica de $\mathbb{R}^3$ sea

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

- a) Sabemos que las columnas de la matriz A constituyen un sistema generador de Imf , así que calculamos una base de Imf a partir de dicho sistema generador, aplicando el método de Gauss a esos generadores

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 - 5F_1 \\ F_4 - 2F_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_2 \\ \frac{-1}{3}F_3}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & a-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 + F_2}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Para que $\dim(Imf) = 2$, debe ser $a - 1 = 0$, es decir, $a = 1$.

- b) Con $a = 1$, la matriz de la aplicación en las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$Kerf = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 / A\vec{v} = \vec{0} \right\}$$

Para resolver el sistema homogéneo $A\vec{v} = \vec{0}$ aplicamos el método de Gauss a la matriz del sistema para obtener un sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el siguiente sistema equivalente, que son las ecuaciones implícitas de $Kerf$

$$\begin{cases} x + 5y - z + 2t = 0 \\ -3y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

y unas ecuaciones paramétricas pueden ser

$$\rightarrow \begin{cases} x = \alpha - 3\beta \\ t = -3\alpha + 2\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

con lo una base de $Kerf$ es

$$\mathcal{B}_{Kerf} = \{(1, 1, 0, -3), (-3, 0, 1, 2)\}$$

- c) Teniendo en cuenta el siguiente esquema de cambio de base

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \\ & & P \downarrow & & \downarrow Q \\ & & \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{M} & \mathcal{B}_2 \end{array}$$

en el que P es la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la base $\mathcal{B}_1$ y Q es la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base $\mathcal{B}_2$, se tiene que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de la aplicación en las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ es

$$M = Q^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & 16 & -9 & -17 \\ -2 & 2 & -3 & -4 \\ 16 & -16 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

d) Teniendo en cuenta el siguiente esquema de cambio de base

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} \xrightarrow{A} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \\ & & P \mid \mid I \\ & & \mathcal{B}_1 \xrightarrow{N} \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

la matriz de la aplicación en las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^4$ y canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$N = AP = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 5 \\ 8 & 6 & 1 & -2 \\ 4+a & 2 & 2 & 2-a \end{pmatrix}$$

y para que la primera columna de la matriz N sea $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ debe ser $a = -1$.

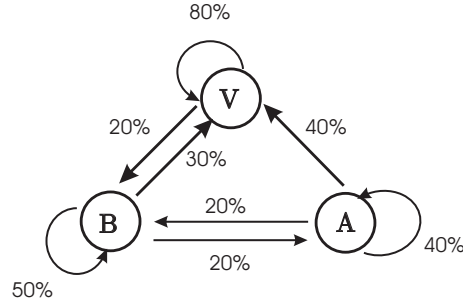
2. Una agencia de aviación tiene su flota de aviones distribuida entre los aeropuertos de Barcelona, Asturias y Valencia. De los aviones que el día 1 de cada mes están en Barcelona, el 1 del siguiente mes sólo están la mitad, un 20 % se va a Asturias y el resto a Valencia. De los aviones que están el 1 de cada mes en Asturias, el 1 del mes siguiente estará un 20 % en Barcelona, un 40 % en Valencia y el resto estará en Asturias. Por último, de los aviones que había en Valencia el 1 de cada mes, un 80 % regresará al mismo aeropuerto el 1 del mes siguiente, mientras que el resto se dirige a Barcelona. Suponiendo que el número de aviones es constante:

- Plantear de forma matricial la relación entre el número inicial de aviones en cada ciudad y el número de aviones que habrá en el mes n -ésimo.
- Sabiendo que inicialmente la compañía dispone de 210 aviones, encuentre una situación inicial que haga que el número de aviones en cada ciudad permanezca constante con el paso de los meses.
- Suponiendo que inicialmente se dispone de 350 aviones en Barcelona, 500 en Asturias y 650 en en Valencia, ¿cuál sería la tendencia a largo plazo?

SOLUCIÓN:

- El esquema que describe la transferencia de aviones entre dos meses consecutivos es:
Llamando A_n al número de aviones que están en Asturias en el mes n , V_n al número de aviones en Valencia, también en el mes n , y B_n al número de aviones en Barcelona en el mismo mes, las ecuaciones que rigen el problema son:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{40}{100}A_{n-1} + \frac{20}{100}B_{n-1} \\ V_n &= \frac{40}{100}A_{n-1} + \frac{80}{100}V_{n-1} + \frac{30}{100}B_{n-1} \\ B_n &= \frac{20}{100}A_{n-1} + \frac{20}{100}V_{n-1} + \frac{50}{100}B_{n-1} \end{aligned} \right\}$$



que se puede representar matricialmente como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_n \\ V_n \\ B_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{40}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ V_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

de forma que:

$$X_n = MX_{n-1} = M(MX_{n-2}) = M^2X_{n-2} = \dots M^n X_0$$

así que para encontrar las relaciones pedidas, debemos calcular la potencia n -ésima de M , para ello la diagonalizaremos.

Paso 1: Cálculo del polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \frac{40}{100} - \lambda & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{40}{100} & \frac{80}{100} - \lambda & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{50}{100} - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} - \lambda & -\frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & 0 & \frac{30}{100} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) \left(\frac{40}{100} - \lambda \right) \left(\frac{30}{100} - \lambda \right) \end{aligned}$$

Paso 2: Cálculo del espectro:

$$\sigma(M) = \left\{ 1, \frac{40}{100}, \frac{30}{100} \right\}$$

Paso 3: Cálculo de los subespacios propios:

$$S(1) = \{X / (M - 1I)X = [0]\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - I$:

$$\begin{aligned}
 M - I &= \begin{pmatrix} -\frac{60}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2+F_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{F_1 \times} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \\ \frac{40}{100} & -\frac{20}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \\ 0 & -\frac{60}{100} & \frac{130}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & -\frac{50}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 \times]{10F_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -13 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_2/6} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{6} \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\alpha \\ y &= \frac{13}{6}\alpha \\ z &= \alpha \end{aligned} \right\}$$

Por lo que $S(1) = \left\langle \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{6}, 1 \right) \right\rangle$

$$S\left(\frac{40}{100}\right) = \left\{ X / \left(M - \frac{40}{100}I \right) X = [0] \right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - \frac{40}{100}I$:

$$\begin{aligned}
 M - \frac{40}{100}I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{40}{100} & \frac{30}{100} \\ 0 & 0 & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_3} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ 0 & 0 & \frac{10}{100} \\ 0 & 0 & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[10F_3]{10F_1/2, 10F_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{F_1-F_2/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Por lo que $S\left(\frac{40}{100}\right) = \langle(-1, 1, 0)\rangle$

$$S\left(\frac{30}{100}\right) = \left\{X / \left(M - \frac{30}{100}I\right) X = [0]\right\}$$

Resolvemos el sistema homogéneo cuya matriz asociada es $M - \frac{30}{100}I$:

$$\begin{aligned} M - \frac{30}{100}I &= \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & 0 & \frac{20}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2+F_3} \begin{pmatrix} \frac{70}{100} & \frac{70}{100} & \frac{70}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow{10F_1/7} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{100} & \frac{1}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{40}{100} & \frac{50}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{20}{100} & \frac{20}{100} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{F_3-20/100F_1}{F_2-40/100F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{100} & \frac{1}{100} \\ 0 & \frac{10}{100} & -\frac{10}{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{10F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución paramétrica es:

$$\left. \begin{aligned} x &= -2\alpha \\ y &= \alpha \\ z &= \alpha \end{aligned} \right\}$$

Por lo que $S\left(\frac{30}{100}\right) = \langle(-2, 1, 1)\rangle$

Por lo tanto

$$X_n = M^n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{40}{100}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{30}{100}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ V_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$$

b) Se nos pide una situación estable, es decir, una situación inicial asociada al valor propio 1, entonces:

$$210 = \alpha \frac{1}{3} + \alpha \frac{13}{6} + \alpha, \quad \alpha = 210 \frac{6}{21} = 60$$

por lo tanto, originalmente habrá 20 aviones en Asturias, 130 en Valencia y 60 en Barcelona

c) Nos piden el límite de X_n , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ \frac{13}{6} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{40}{100}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{30}{100}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & 2 \\ \frac{13}{6} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 500 \\ 650 \\ 350 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -2 \\ \frac{13}{6} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 500 \\ 650 \\ 350 \end{pmatrix}$$

3. En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ se considera la aplicación $q_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, cuya expresión en la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$q_a(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 2axy - 2ayz$$

Se pide contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

- Calcular, utilizando el método de Gauss, los valores de a que hacen que la aplicación citada sea un cuadrado escalar. En lo que sigue, utilizar el valor $a = 0$.
- Dada la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\pi \equiv \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ y $\pi^\perp \equiv \langle \vec{w} \rangle$, calcular la proyección ortogonal de $3\vec{u} + 4\vec{v}$ sobre $\langle \vec{w} \rangle$.
- Encontrar, en una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y en la base canónica, la matriz asociada a la simetría ortogonal respecto del plano $\pi \equiv x + y - z = 0$. Decir quien es la base ortonormal elegida.

SOLUCIÓN

- a) Expresamos la aplicación dada en forma matricial, como sigue

$$q_a(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores de a que hagan que la matriz G de la aplicación cumpla el criterio de Sylvester (todos los menores angulares de la matriz deben ser estrictamente positivos) serán los que hagan que la aplicación citada sea un cuadrado escalar.

Aplicando el método de Gauss, obtenemos

$$\begin{aligned} q_a(x, y, z) &= x^2 + 2y^2 + z^2 + 2axy - 2ayz = \\ &= [x + ay]^2 - a^2y^2 + 2y^2 + z^2 - 2ayz = \\ &= [x + ay]^2 + (2 - a^2) \left[y^2 - \frac{2ayz}{2 - a^2} \right] + z^2 = \\ &= [x + ay]^2 + (2 - a^2) \left[y - \frac{az}{2 - a^2} \right]^2 - \frac{a^2z^2}{2 - a^2} + z^2 = \\ &= [x + ay]^2 + (2 - a^2) \left[y - \frac{az}{2 - a^2} \right]^2 + \left(1 - \frac{a^2}{2 - a^2} \right) z^2 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} x_1 = x + ay \\ y_1 = y - \frac{az}{2 - a^2} \\ z_1 = z \end{cases}$$

queda

$$q_a(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2-2a^2}{2-a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

y para que sea un cuadrado escalar deben ser todos los elementos de la diagonal positivos, con lo que debe verificarse

$$\begin{cases} 2-a^2 > 0 \\ 2-2a^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 < 2 \\ a^2 < 1 \end{cases} \rightarrow -1 < a < 1$$

b) La proyección ortogonal de $3\vec{u} + 4\vec{v}$ sobre $\langle \vec{w} \rangle$ es

$$\vec{p} = \frac{(3\vec{u} + 4\vec{v}) \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{3\vec{u} \cdot \vec{w} + 4\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \vec{0}$$

ya que $\langle \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^\perp$.

c) Calculamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por dos vectores del plano y otro de su suplemento ortogonal. Una base del plano es

$$\pi \equiv \langle \vec{e}_1 = (1, 0, 1), \vec{e}_2 = (0, 1, 1) \rangle$$

así que, utilizando el método de Gramm-Schmidt, construimos una base ortogonal del plano $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 &= \alpha \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{aligned}$$

donde, teniendo en cuenta que $a = 0$

$$\alpha = \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}$$

y

$$\vec{v}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{v}_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, 1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

con

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \\ \|\vec{v}_2\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Entonces una base ortonormal del plano es

$$\left\{ \vec{u}_1 = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}, \vec{u}_2 = \frac{(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \right\}$$

Calculamos el suplemento ortogonal al plano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} \cdot (x,y,z) = 0 \\ \frac{(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{2}}} \cdot (x,y,z) = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ (-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

que son las soluciones del sistema homogéneo resultante

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + 4y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

es decir

$$\pi^\perp \equiv \left\langle \vec{v}_3 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 1\right) \right\rangle$$

con

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

y un vector unitario de $\pi^\perp$ es

$$\vec{u}_3 = \frac{(-1, -\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

La base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ elegida es

$$\left\{ \vec{u}_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}, \vec{u}_2 = \sqrt{2} \frac{(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})}{\sqrt{5}}, \vec{u}_3 = \sqrt{2} \frac{(-1,-\frac{1}{2},1)}{\sqrt{3}} \right\}$$

en la cual la matriz de la simetría respecto al plano π es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de la simetría en la base canónica es

$$B = PAP^{-1}$$

donde P es la matriz de cambio de base de la base canónica a la base ortonormal calculada, es decir, la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base ortonormal.