



NOMBRE:	Nº:
---------	-----

Problema 1 Sea $T : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida como sigue:

$$T(1+x) = (2, 1); \quad T(1-x) = (0, 1); \quad T(1+x-x^2) = (2, 0)$$

- a) Calcule la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- b) Calcule $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$ e indique si T es una aplicación biyectiva.
- c) Conociendo que la matriz de la aplicación T respecto de una base B' de $\mathbb{R}_2[X]$ y de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine los vectores de la base B' .

Solución 1

- a) Sea $B = \{1+x, 1-x, 1+x-x^2\}$ la base de $\mathbb{R}_2[X]$ cuyas imágenes se definen en el enunciado. La matriz de la aplicación lineal T respecto de la base B y la canónica de $\mathbb{R}$ es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resulta que la matriz de la aplicación lineal T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$ y de la base canónica de $\mathbb{R}$ es:

$$M = AP$$

Donde P es la matriz de cambio de la base B a la base canónica de $\mathbb{R}_2[X]$. Por tanto se conoce P^{-1} cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios de la base B :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\implies M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Para el cálculo de $\text{Ker}(T)$ utilizaremos la matriz M :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $\text{Ker}(T)$ son:

$$\begin{cases} a_0 &= -a_1 \\ a_2 &= a_1 \end{cases}$$

Y las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= -\alpha \\ a_2 &= -\alpha \end{cases} \quad \alpha, \in \mathbb{R}$$

De donde resulta que una base del subespacio vectorial $\text{Ker}(T)$ es:

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1 - x - x^2\}$$

Resulta que la aplicación T no es inyectiva.

Para el cálculo de $\text{Im}(T)$ utilizamos la traspuesta de la matriz M :

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim I_2 \implies \text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

Por tanto la aplicación es suprayectiva pero no es biyectiva.

c) La base de $\mathbb{R}_2[X]$ que se debe hallar es:

$$B' = \{p_1, p_2, p_3\}, \text{ con } p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}_2[X]$$

$$\text{Sean: } \begin{cases} p_1 &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ p_2 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 \\ p_3 &= c_0 + c_1x + c_2x^2 \end{cases} \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$$

Del cambio de base de la canónica de $\mathbb{R}_2[X]$ a B' resulta que:

$$M_1 = MQ$$

Donde Q es la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathbb{R}_2[X]$ a la base B' y cuyas columnas son las coordenadas de los polinomios p_1, p_2, p_3 que debemos hallar.

$$(M|M_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Resolviendo estos tres sistemas indeterminados obtenemos:

$$\begin{cases} a_0 &= 1 - \alpha \\ a_1 &= \alpha \\ a_2 &= \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}; \begin{cases} b_0 &= 1 - \beta \\ b_1 &= \beta \\ b_2 &= \beta - 2 \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}; \begin{cases} c_0 &= 1 - \gamma \\ c_1 &= \gamma \\ c_2 &= \gamma + 2 \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Al mismo tiempo los polinomios p_1, p_2, p_3 deben ser linealmente independientes para formar una base de $\mathbb{R}_2[X]$ y por tanto se debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 - \beta & \beta & \beta - 2 \\ 1 - \gamma & \gamma & \gamma + 2 \end{pmatrix} \sim I_3$$

Resulta que $1 - \alpha$, $1 - \beta$ y $1 - \gamma$ no se pueden anular al mismo tiempo.

En el supuesto que $1 - \alpha \neq 0 \implies \begin{cases} \alpha &\neq \beta \\ \beta + \gamma - 2\alpha &\neq 0 \end{cases} \quad \text{Considerando un caso particular}$

que cumpla estas condiciones obtenemos una base de $\mathbb{R}_2[X]$ donde la matriz de la aplicación T sea $M1$:

$$\text{Para } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = x - x^2 \\ p_3 = x + 3x^2 \end{cases}$$

Problema 2 En el espacio euclídeo de $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ se considera la aplicación $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2\alpha xy - 2\alpha yz$$

- a) Calcule, utilizando el método de Gauss, los valores del parámetro real α que hacen que la aplicación q sea un cuadrado escalar.
- b) Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que el subespacio $H = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ tenga el suplemento ortogonal $H^\perp = \langle \vec{e}_3 \rangle$. Calcule la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ sobre el subespacio $H^\perp$.

Solución 2 Problema común con el grupo 3.

Problema 3 Calcule la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la simetría ortogonal de los vectores de $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $(H): x + y + z = 0$.

Solución 3 Una base del plano dado es $B_H = \{\vec{v}_1 = (1, 0, -1), \vec{v}_2 = (0, 1, -1)\}$. Buscamos un vector ortogonal al plano (H) :

$$\vec{v}_3 \perp (H) \iff \begin{cases} \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \end{cases} \implies \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$$

Formamos la base de $\mathbb{R}^3$: $B = \{\vec{v}_1 = (1, 0, -1), \vec{v}_2 = (0, 1, -1), \vec{v}_3 = (1, 1, 1)\}$.

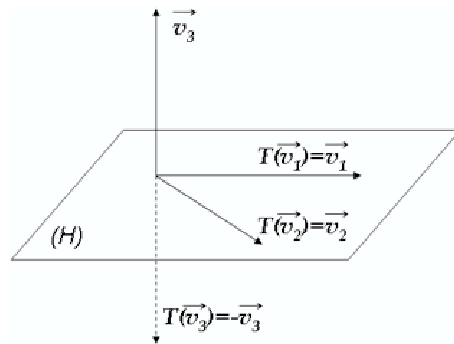


Figura 1: Las imágenes de los vectores de la base B

Calculamos la matriz de la simetría respecto de esta base que es la matriz cuyas columnas son las coordenadas respecto de B de las imágenes de los vectores de la base B :

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T(\vec{v}_1)]_B & [T(\vec{v}_2)]_B & [T(\vec{v}_3)]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{v}_1]_B & [\vec{v}_2]_B & [\vec{v}_3]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

Cambiando a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtenemos:

$$[T]_{B_C} = P^{-1}DP$$

Donde la matriz P^{-1} es la matriz de cambio de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B y tiene por columnas las coordenadas de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ respecto de la canónica:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_{B_C} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Otra solución sería trabajar con una base ortonormal en cuyo caso primero se ortogonaliza la base del subespacio (H) aplicando el método de Gram Schmidt:

Consideramos $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ y buscamos $\vec{w}_2 \perp \vec{w}_1$ tal que: $\vec{v}_2 = \alpha \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{v}_2 \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \vec{w}_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \alpha \vec{w}_1 = (0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$$

Como tenemos $\vec{v}_3 \perp H \Rightarrow \vec{v}_3 \perp \vec{w}_1$ y $\vec{v}_3 \perp \vec{w}_2$ Por tanto: $B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Normalizamos esta base: $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{2}, \|\vec{w}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \|\vec{v}_3\| = \sqrt{3}$. Obtenemos la base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$B' = \{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1), \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\}$$

La matriz de la simetría respecto de esta base B' es:

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} [T(\vec{e}_1)]_{B'} & [T(\vec{e}_2)]_{B'} & [T(\vec{e}_3)]_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\vec{e}_1]_{B'} & [\vec{e}_2]_{B'} & [\vec{e}_3]_{B'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

Cambiando a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtenemos la matriz de la simetría:

$$[T]_{B_C} = P^{-1}DP$$

donde la matriz P^{-1} es la matriz de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B' y tiene por columnas las coordenadas de los vectores de B' :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Como la base canónica es una base ortonormal respecto del producto escalar habitual en $\mathbb{R}^3$, resulta que la matriz P^{-1} es una matriz ortogonal y su inversa es su traspuesta:

$$P = (P^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_{B_C} = P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Una agencia de aviación tiene su flota de aviones distribuida entre los aeropuertos de Barcelona, Asturias y Valencia. De los aviones que el día 1 de cada mes están en Barcelona, el 1 del siguiente mes sólo están la mitad, un 20 % se va a Asturias y el resto a Valencia. De los aviones que están el 1 de cada mes en Asturias, el 1 del mes siguiente un 20 % estará en Barcelona, un 40 % a Valencia y el resto estará en Asturias. Análogamente, de los aviones que había en Valencia el 1 de cada mes, un 80 % regresará al mismo aeropuerto el 1 del mes siguiente, mientras que el resto se dirige a Barcelona. Suponiendo que el número de barcos es constante:

- a) *Plantea de forma matricial la relación entre el número inicial de aviones en cada ciudad y el número de aviones que habrá en el mes n -ésimo.*
- b) *Sabiendo que inicialmente la compañía dispone de 210 aviones, encuentre una situación inicial que haga que el número de aviones en cada ciudad permanezca constante con el paso de los meses.*
- c) *Suponiendo que inicialmente se dispone de 350 aviones en Barcelona, 500 en Asturias y 650 en Valencia, ¿cuál sería la tendencia a largo plazo?*

Solución 4 *Problema común con los grupos 2 y 3.*