



NOMBRE:	Nº:
---------	-----

Cuestión 1 Demuestre que en un espacio vectorial V de dimensión n cualquier base B tiene n vectores.

Solución 1 Teoría

Cuestión 2

a) Demuestre que dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 forman una suma directa si y sólo si se cumple:

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

b) Sean los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$V_1 = \langle (1, 1, -1, 3), (0, -2, 0, 1) \rangle; \quad V_2 = \langle (2, 1, 0, 4), (1, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 1) \rangle$$

Calcule una base del subespacio vectorial $V_1 + V_2$ y decida si V_1 y V_2 son suplementarios.

c) Encuentre las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio vectorial V_2 y calcule una base suya.

d) Extienda esta base hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

Solución 2

a) Teoría

b) Una base del subespacio vectorial V_1 es $B_1 = \{(1, 1, -1, 3), (0, -2, 0, 1)\}$ por tanto $\dim(V_1) = 2$ y calculamos una base de V_2 aplicando el método de Gauss a los vectores de su sistema de generadores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de V_2 es $B_2 = \{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ y $\dim(V_2) = 3$.

Calculemos ahora la base de la suma de los dos subespacios aplicando el método de Gauss a los vectores generadores de $V_1 + V_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim I_4$$

$\Rightarrow$ una base de $V_1 + V_2$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\dim(V_1 + V_2) = 4$. Por tanto no se cumple la propiedad: $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ ya que $4 \neq 2 + 3$ y los dos subespacios no son suplementarios.

- c) Utilizando la base de V_2 calculada en el punto anterior $B_2 = \{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$, deducimos las ecuaciones paramétricas de este subespacio:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = 2\alpha - \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Eliminando los parámetros resulta la ecuación implícita que describe el subespacio vectorial V_2 :
 $2x - z - t = 0$

- d) Para extender la base de V_2 hasta una base de $\mathbb{R}^4$ añadimos un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ que forme, junto con los vectores de la base de V_2 , un sistema libre, por ejemplo $(1, 0, 0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim I_4$$

Cuestión 3

- a) Sea $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Demostrar que si existe una base de V formada por vectores propios entonces T es un endomorfismo diagonalizable.
- b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que tiene un subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$ definido por la ecuación $x - y - z = 0$. También se sabe que el vector $\vec{v} = (2, 0, 1)$ es un vector propio de T asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$.
 Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de T y calcule la matriz del endomorfismo en esta misma base.
 Encuentre la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución 3

- a) Teoría
- b) Una base del subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$, $S_T(2)$ es $B_1 = \{\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (1, 0, 1)\}$ y una base del subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$, $S_T(1)$ es $B_2 = \{\vec{v} = (2, 0, 1)\}$

Formamos la base de $\mathbb{R}^3$:

$S_T(2) \oplus S_T(1) = \mathbb{R}^3 \implies B = B_1 \cup B_2$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de T .

La matriz del endomorfismo respecto de esta base es la matriz cuyas columnas son las imágenes de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}$ expresadas en la base B : $T(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1$; $T(\vec{v}_2) = 2\vec{v}_2$ y $T(\vec{v}) = 1\vec{v}$;
 Por tanto la matriz es:

$$[T]_B = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambiando a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtenemos la matriz del endomorfismo respecto de esta base:

$$[T]_{B_C} = P^{-1}DP$$

Donde P^{-1} es la matriz de cambio de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B y tiene por columnas los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_{B_C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$