

NOMBRE:

Nº:

TEORIA

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada en unas ciertas bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Calcular a sabiendo que el vector cuyas coordenadas en la base de $\mathbb{R}^4$ dada son $(-2, -2, -6, -16)$ pertenece a $\text{Ker}T$.
 b) ¿Es T una aplicación inyectiva? ¿Y suprayectiva?. Razónense las respuestas.

SOLUCIÓN

a)

$$\text{Ker}T = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 / A\vec{v} = \vec{0} \right\}$$

entonces, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos sistemas equivalentes al dado, cuyas matrices de coeficientes son

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F3+2F2 \\ F1+2F2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-\frac{5}{3}F1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}+a & -1 \end{pmatrix}$$

entonces, un sistema equivalente al sistema homogéneo inicial es

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3}+a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ \left(\frac{5}{3} + a\right)z - t = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 3y \\ x = y \\ t = \left(\frac{5}{3} + a\right)z = (5 + 3a)y \end{cases}$$

con lo que

$$\text{Ker}T = \langle (1, 1, 3, 5 + 3a) \rangle$$

y como $(-2, -2, -6, -16) \in \text{Ker}T$, debe cumplirse que

$$-16 = -2(5 + 3a) \rightarrow a = 1$$

- b) La aplicación no puede ser inyectiva porque $\text{Ker}T$ no se reduce al vector nulo. Además, según el teorema del rango

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker}T + \dim T(\mathbb{R}^4) = \dim \text{Ker}T + \text{rg}T$$

con lo que la aplicación es suprayectiva ya que $\text{rg}T = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

2. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales. En los casos en los que así sea, calcular una base de los mismos. Calcular también el subespacio intersección y suma de los mismos.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$$

$$C = \{(a+1, a) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a^2 + b^2 = 1\}$$

$$E = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

SOLUCIÓN

A es subespacio vectorial y $A = \langle (0, 0, 1) \rangle$.

B es subespacio vectorial y $B = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$.

C no es subespacio vectorial ya que no contiene al vector nulo.

D no es subespacio vectorial ya que no contiene al vector nulo.

E no es subespacio vectorial ya que $\alpha(a, b)$ no siempre pertenece a E para todo α real

Puesto que A y B son subespacios de $\mathbb{R}^3$, podemos calcular los subespacios $A \cap B$ y $A + B$

$$A \cap B = A = \langle (0, 0, 1) \rangle$$

$$A + B = B = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$$

PROBLEMAS

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Decir si puede tratarse de la matriz asociada a un giro o una simetría. En caso afirmativo, calcular el eje de giro o el plano de simetría, según corresponda.

SOLUCIÓN

Calculamos los valores propios de la matriz A

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{C1+C2+C3} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} - \lambda & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{C1-C2} = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ 1 - \lambda & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{F3-F1} = \\
 &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \\
 &= (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \left[\left(-\frac{1}{3} - \lambda \right) \left(\frac{1}{3} - \lambda \right) - \frac{8}{9} \right] = \\
 &= (1 - \lambda) (\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)
 \end{aligned}$$

y vemos que se trata de una simetría con respecto a un plano, que es el subespacio propio asociado al valor propio 1

$$\begin{aligned}
 \text{Ker}(A - I) &= \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / (A - I) \vec{v} = \vec{0} \right\} \\
 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{x - 2y - z = 0\}
 \end{aligned}$$

y el plano de simetría es $x - 2y - z = 0$.

- En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, $\mathbb{R}_2[x]$, se define la aplicación

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in \mathbb{R}_2[x]$$

- Comprobar que se trata de un producto escalar. Encontrar la matriz asociada a dicho producto escalar en la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.
- Mediante el método de Gram-Schmidt encontrar, a partir de la base $\mathcal{B}$, una base ortonormal $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Encontrar la relación que existe entre las matrices asociadas a dicho producto escalar en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Calcular los coeficientes de la proyección ortogonal de x^2 sobre $\langle 1+x \rangle$.

SOLUCIÓN

- La matriz asociada a la aplicación dada en la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ es

$$G = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle 1, x \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle 1, x^2 \rangle & \langle x, x^2 \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

y para que sea la matriz asociada a un producto escalar, debe cumplir el criterio de Sylvester, es decir, todos los menores angulares de G deben ser estrictamente positivos.

$$\begin{aligned} 3 &> 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} &= 6 > 0 \\ \det G &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de un producto escalar.

- Elegimos $p_1 = 1$ y hacemos

$$x = \alpha p_1 + p_2, \text{ con } \langle p_1, p_2 \rangle = 0$$

entonces, multiplicando escalarmente la igualdad anterior por p_1 , queda

$$\alpha = \frac{\langle p_1, x \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} = \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{3}{3} = 1$$

y

$$p_2 = x - 1$$

Ahora escribimos

$$x^2 = \beta p_1 + \gamma p_2 + p_3, \text{ con } \langle p_1, p_3 \rangle = 0, \langle p_2, p_3 \rangle = 0$$

y multiplicando escalarmente la igualdad por p_1 y p_2 respectivamente, queda

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\langle p_1, x^2 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} = \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{5}{3} \\ \gamma &= \frac{\langle p_2, x^2 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} = \frac{\langle x-1, x^2 \rangle}{\langle x-1, x-1 \rangle} = \frac{\langle x, x^2 \rangle - \langle 1, x^2 \rangle}{\langle x, x \rangle - 2\langle 1, x \rangle + \langle 1, 1 \rangle} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

con lo que

$$p_3 = x^2 - \frac{5}{3} - 2(x-1) = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$$

cuyo cuadrado escalar es

$$\left\langle x^2 - 2x + \frac{1}{3}, x^2 - 2x + \frac{1}{3} \right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

y una base ortonormal $\mathcal{B}'$ será

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \frac{x^2-2x+\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right\}$$

- c) La matriz del producto escalar en la base ortonormal $\mathcal{B}'$ es la identidad, así que la relación entre las matrices asociadas a dicho producto escalar en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es

$$I = P^t G P$$

siendo P la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 1 & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

- d) El polinomio x^2 puede expresarse, de forma única, como sigue

$$x^2 = \alpha(1+x) + p, \quad p \in \langle 1+x \rangle^\perp$$

así que el coeficiente de la proyección ortogonal pedida es

$$\alpha = \frac{\langle x^2, 1+x \rangle}{\langle 1+x, 1+x \rangle} = \frac{14}{14} = 1$$