



NOTA: Esta parte del examen puntúa 4 puntos de los 8 totales del examen escrito. Para aprobar el examen escrito es imprescindible obtener al menos 1,25 en esta parte.

1. Supongamos que se imparte un curso de matemáticas en dos aulas A y B. Si cada semana dejan el curso la mitad de los alumnos que están en el aula A y la mitad de los que están en el aula B, y además la sexta parte de los alumnos de cada aula se pasa a la otra, se pide:
 - a) Encontrar la matriz de transición que relaciona el estado de las aulas en la semana n -ésima con el estado inicial.
 - b) Calcular el número de alumnos que habrá en cada una de las aulas al cabo de 8 semanas si inicialmente había 256 alumnos en cada una de ellas.
 - c) Calcular el número inicial de alumnos que debe haber en el aula B, sabiendo que en el aula A hay 100 alumnos, para que la suma de los alumnos de las dos aulas sea igual al número total de alumnos que abandonan el curso cuando el número de semanas crece indefinidamente.

SOLUCIÓN

- a) Llamando a_n , b_n y f_n al número de alumnos en las aulas A, B y al número de alumnos que abandonan el curso respectivamente en la semana n -ésima, se tiene

$$\begin{cases} a_n = 1/3 a_{n-1} + 1/6 b_{n-1} \\ b_n = 1/6 a_{n-1} + 1/3 b_{n-1} \\ f_n = 1/2 a_{n-1} + 1/2 b_{n-1} + f_{n-1} \end{cases}$$

que matricialmente se puede expresar como sigue

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz de transición que relaciona el estado del número de alumnos en la semana n -ésima y la semana anterior.

- b) Calculamos los valores propios de A para obtener la matriz diagonal

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1/3 - \lambda & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 - \lambda & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (1 - \lambda) [(1/3 - \lambda)^2 - 1/36] = \\ &= (1 - \lambda) (1/2 - \lambda) (1/6 - \lambda) \end{aligned}$$

Veamos ahora los subespacios propios para obtener la matriz de cambio de base que relaciona la matriz A con la matriz diagonal D .

$$\begin{aligned} S(1) &= \text{Ker}(A - I) \\ \begin{pmatrix} -2/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & -2/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} -2/3 x + 1/6 y = 0 \\ 1/6 x - 2/3 y = 0 \\ 1/2 x + 1/2 y = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} -4x + y = 0 \\ x - 4y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

entonces $S(1) = \langle (0, 0, 1) \rangle$

$$S(1/2) = \text{Ker} \left(A - \frac{1}{2}I \right)$$

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & -1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1/6 x + 1/6 y = 0 \\ 1/6 x - 1/6 y = 0 \\ 1/2 x + 1/2 y + 1/2 z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

entonces $S(1/2) = \langle (1, 1, -2) \rangle$

$$S(1/6) = \text{Ker} \left(A - \frac{1}{6}I \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1/6 x + 1/6 y = 0 \\ 1/6 x + 1/6 y = 0 \\ 1/2 x + 1/2 y + 5/6 z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

entonces $S(1/6) = \langle (1, -1, 0) \rangle$.

Por tanto

$$D = \text{diag} \left(1 \frac{1}{2} \frac{1}{6} \right) \quad y \quad D^n = \text{diag} \left(1 \frac{1}{2^n} \frac{1}{6^n} \right)$$

y

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que podemos calcular la matriz de transición en la semana n-ésima

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si inicialmente hay 256 en cada aula, al cabo de 8 años ($n = 8$) el número de alumnos en cada aula es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{6^8} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{6^8} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^8} - \frac{1}{6^8} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{6^8} \right) & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^8} & 1 - \frac{1}{2^8} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 256 \\ 256 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^8} 256 \\ \frac{1}{2^8} 256 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 510 \end{pmatrix}$$

c) Teniendo en cuenta la potencia n-ésima de la matriz de transición

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix}$$

y un vector de condiciones iniciales $X_0 = (100, \alpha, 0)^t$, en el paso al límite se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n X_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{100}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) \\ \frac{100}{2} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n} \right) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n} \right) \\ 100 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) + \alpha \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 + \alpha \end{pmatrix}$$

con lo que, independientemente del número de alumnos que asistan al aula B, se cumplen las condiciones impuestas en el enunciado.

2. Se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 + (a_2 - 2a_3)x + (a_1 + a_3)x^2$$

Se pide

- Calcular la matriz A de la aplicación T en las bases canónicas $\mathcal{B}_{c1} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $\mathcal{B}_{c2} = \{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente, y la matriz M asociada a T en las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$, siendo $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_3 + \vec{e}_2$.
- Hallar, si es posible, una base de $\text{Im}T$ y otra de $\text{Ker}T$, así como sus ecuaciones implícitas y paramétricas.
- Hallar la imagen por T del vector $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{e}_3$, y expresarla en la base canónica y en la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Calcular $T^{-1}(4 + 2x + 3x^2)$ y expresarla en las bases canónica y $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$.
- Dados $H = \{[x, y, z]_{\mathcal{B}_{c1}} \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $J = \langle [2, 1, 1]_{\mathcal{B}_2}, [1, 0, 1]_{\mathcal{B}_2} \rangle$, subespacios de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente, decir si $T^{-1}(J) \oplus H = \mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN

- a) La matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenida directamente de la definición de la aplicación.

La matriz de la aplicación en las bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ es $M = Q^{-1}AP$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Puesto que no especifica en qué base tienen que estar expresados $\text{Im}T$ y $\text{Ker}T$, podemos utilizar la matriz A o la matriz M . Utilizamos la matriz A porque tiene un número mayor de elementos nulos y es más sencillo el cálculo, con lo que $\text{Im}T$ y $\text{Ker}T$ vendrán expresados en las bases canónicas correspondientes.

Un sistema generador de $\text{Im}T$ son las imágenes de los vectores de una base del espacio inicial. En este caso, las columnas de la matriz A son las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ expresados en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$

$$\text{Im} T = \langle (2, 0, 1), (1, 1, 0), (0, -2, 1) \rangle = \langle (1, 1, 0), (0, -2, 1) \rangle$$

y las ecuaciones paramétricas e implícitas son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \rightarrow y = x - 2z$$

De manera análoga, se calcula el núcleo de la aplicación

$$\text{Ker}T = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / T(\vec{v}) = \vec{0} \}$$

para lo que resolvemos el siguiente sistema homogéneo, con lo que obtenemos las ecuaciones implícitas y paramétricas respectivamente de $\text{Ker}T$

$$AX = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \end{cases}$$

y una base es

$$\text{Ker}T = \langle (-1, 2, 1) \rangle$$

- c) Calculamos la imagen de $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{e}_3$ en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$, para lo cual expresamos dicho vector en la base canónica y utilizamos la matriz A para calcular su imagen.

$$\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{e}_3 = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \vec{e}_3 = [2, 2, 1]_{\mathcal{B}_{c1}}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora expresamos el vector $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ y utilizamos la matriz M para calcular su imagen en la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Las coordenadas de $\vec{e}_3$ en la base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ son

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{e}_3 = 2\vec{v}_1 + \frac{1}{2}(-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \frac{1}{2}(3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3)$$

y su imagen en la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$

$$M \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- d) Para calcular $T^{-1}(4 + 2x + 3x^2)$ debemos tener en cuenta que el polinomio $4 + 2x + 3x^2$ está expresado en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. De modo que, para calcular $T^{-1}(4 + 2x + 3x^2)$ y expresarla en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, debemos utilizar la matriz A y resolver el siguiente sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y - 2z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

que es incompatible ya que el rango de A es 2 y el de la matriz ampliada es 3. Por tanto, el polinomio dado no está en $\text{Im}T$ y no existe $T^{-1}(4 + 2x + 3x^2)$.

- e) Dados $H = \{[x, y, z]_{\mathcal{B}_{c1}} \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ y $J = \langle [2, 1, 1]_{\mathcal{B}_2}, [1, 0, 1]_{\mathcal{B}_2} \rangle$, subespacios de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente, decir si $T^{-1}(J) \oplus H = \mathbb{R}^3$.

La matriz que nos da la imagen de un vector expresado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[x]$ es

$$N = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular $T^{-1}(J)$, resolvemos el sistema

$$N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 2\alpha + \beta \\ -x + y - 3z = \alpha \\ x + z = \alpha + \beta \end{cases}$$

que es incompatible si $\beta \neq 0$, y para $\beta = 0$ es equivalente a

$$\begin{cases} y - 2z = 2\alpha \\ x + z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2z + 2\alpha \\ x = \alpha - z \end{cases} \rightarrow 2x - y + 4z = 0$$

y se trata de un subespacio de dimensión 2, y como H también tiene dimensión 2 (una sola ecuación implícita), no puede cumplirse que $T^{-1}(J) \oplus H = \mathbb{R}^3$.

3. Se considera el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y el producto escalar dado por

$$p \cdot q = \int_0^1 p(x) q(x) dx$$

Se pide:

- a) Calcular la matriz del producto escalar en la base $\{1, 1-x, -x+x^2\}$.
- b) Dado el polinomio $p(x) = 1 - 2x + x^2$, calcular su proyección ortogonal $r(x)$ sobre $\langle 1, 1-x \rangle$, y su proyección ortogonal $s(x)$ sobre $\langle 1, 1-x \rangle^\perp$ y decir cómo son $r(x)$ y $s(x)$.
- c) Dada la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ con $x \in [0, 1]$, calcular el polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ que mejor aproxima $f(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados, con el producto escalar definido.

SOLUCIÓN

- a) La matriz del producto escalar en la base $\{1, 1-x, -x+x^2\}$ es

$$G = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot (1-x) & 1 \cdot (-x+x^2) \\ 1 \cdot (1-x) & (1-x) \cdot (1-x) & (1-x) \cdot (-x+x^2) \\ 1 \cdot (-x+x^2) & (1-x) \cdot (-x+x^2) & (-x+x^2) \cdot (-x+x^2) \end{pmatrix}$$

y al ser

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1 \\ 1 \cdot (1-x) &= \int_0^1 (1-x) dx = x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\ 1 \cdot (-x+x^2) &= \int_0^1 (-x+x^2) dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} \\ (1-x) \cdot (1-x) &= \int_0^1 (1-x)^2 dx = x - x^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\ (1-x) \cdot (-x+x^2) &= \int_0^1 (1-x)(-x+x^2) dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = -\frac{1}{12} \\ (-x+x^2) \cdot (-x+x^2) &= \int_0^1 (-x+x^2)^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

la matriz G queda

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & 1/3 & -1/12 \\ -1/6 & -1/12 & 1/30 \end{pmatrix}$$

- b) Para calcular la proyección ortogonal $r(x)$ del polinomio $p(x) = 1 - 2x + x^2$ sobre el subespacio $\langle 1, 1-x \rangle$, debemos obtener una base ortogonal del mismo para lo que utilizamos el método de ortogonalización de Schmidt

$$1-x = \alpha \cdot 1 + q \quad \text{tal que} \quad q \cdot 1 = 0$$

con lo que

$$\alpha = \frac{(1-x) \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

y una base ortogonal de $\langle 1, 1-x \rangle$ es

$$\left\{ 1, \frac{1}{2} - x \right\}$$

Entonces

$$r(x) = \alpha \cdot 1 + \beta \left(\frac{1}{2} - x \right)$$

con

$$\alpha = \frac{p(x) \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{(1-2x+x^2) \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 1 - 2x \cdot 1 + x^2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

y

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{p(x) \cdot (\frac{1}{2} - x)}{(\frac{1}{2} - x) \cdot (\frac{1}{2} - x)} = \frac{(1 - 2x + x^2) \cdot (\frac{1}{2} - x)}{(\frac{1}{2} - x) \cdot (\frac{1}{2} - x)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}1 \cdot 1 - x \cdot 1 + \frac{1}{2}x^2 \cdot 1 - 1 \cdot x + 2x \cdot x - x^2 \cdot x}{\frac{1}{4}1 \cdot 1 - x \cdot 1 + x \cdot x} = \frac{1/12}{1/12} = 1\end{aligned}$$

con lo que

$$r(x) = \frac{1}{3}1 + \left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{5}{6} - x$$

Puesto que la expresión de un polinomio $p(x)$ como suma de dos polinomios $r(x)$ y $s(x)$, pertenecientes a los subespacios $\langle 1, 1 - x \rangle$ y $\langle 1, 1 - x \rangle^\perp$ respectivamente es única, se cumple que

$$s(x) = p(x) - r(x) = 1 - 2x + x^2 - \left(\frac{5}{6} - x\right) = \frac{1}{6} - x + x^2$$

y además

$$r(x) \cdot s(x) = 0$$

- c) Sea $q(x)$ el polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\|f(x) - q(x)\|$ es mínima, esto es, el polinomio que mejor aproxima $f(x)$ en el sentido de los mínimos cuadrados, para lo cual debe cumplirse que $f(x) - q(x) \in \langle 1, x, x^2 \rangle^\perp$.

Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, una base ortogonal de $\mathbb{R}_2[x]$ es

$$\left\{1, \frac{1}{2} - x, \frac{1}{6} - x + x^2\right\}$$

y el polinomio $q(x)$ en esa base es $q(x) = a + b\left(\frac{1}{2} - x\right) + c\left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)$, y la condición anterior puede expresarse como sigue

$$\begin{aligned}\begin{cases} [f(x) - q(x)] \cdot 1 = 0 \\ [f(x) - q(x)] \cdot (\frac{1}{2} - x) = 0 \\ [f(x) - q(x)] \cdot (\frac{1}{6} - x + x^2) = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} f(x) \cdot 1 = q(x) \cdot 1 \\ f(x) \cdot (\frac{1}{2} - x) = q(x) \cdot (\frac{1}{2} - x) \\ f(x) \cdot (\frac{1}{6} - x + x^2) = q(x) \cdot (\frac{1}{6} - x + x^2) \end{cases} \\ \begin{pmatrix} f(x) \cdot 1 \\ f(x) \cdot (\frac{1}{2} - x) \\ f(x) \cdot (\frac{1}{6} - x + x^2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2} - x) \cdot (\frac{1}{2} - x) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{6} - x + x^2) \cdot (\frac{1}{6} - x + x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^1 f(x) (\frac{1}{2} - x) dx \\ \int_0^1 f(x) (\frac{1}{6} - x + x^2) dx \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Calculamos las integrales

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \\ \int_0^1 f(x) x dx &= \int_0^1 x \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} \quad (\text{integrando por partes}) \\ \int_0^1 f(x) x^2 dx &= \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx \\ \int_0^1 x \cos(\pi x) dx &= -\frac{2}{\pi^2} \quad (\text{integrando por partes})\end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx - \int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) dx &= \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi x) dx - \int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi x) dx + \int_0^1 x^2 \operatorname{sen}(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \end{aligned}$$

con lo que el sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} \\ 0 \\ \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1/180 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{\pi} \\ b = 0 \\ c = 180 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \right) \end{cases}$$

y por tanto,

$$q(x) = \frac{2}{\pi} + 180 \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \right)$$