

Cuestión 3 (1.5 puntos) Tres amigos dueños de su casa, uno carpintero, otro electricista y otro fontanero, llegan al acuerdo de hacer las reparaciones necesarias en las tres viviendas. Deciden trabajar en total 10 días cada uno, de acuerdo con el siguiente programa

	días de carpintero	días de electricista	días de fontanero
Días en casa del carpintero	2	1	6
Días en casa del electricista	4	5	1
Días en casa del fontanero	4	4	3

Por motivos de impuestos deciden poner dinero y pagarse a sí mismos un salario diario razonable, incluyendo el trabajo que cada uno hace en su propia casa. Su salario normal está comprendido en el intervalo (6000,8000), pero acuerdan ajustar sus percepciones de forma que ninguno obtenga ventaja, es decir, de forma que la cantidad puesta por cada uno no sea menor en ningún caso a la cantidad recibida por el trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno diariamente?

Llamemos x al precio de cada día de carpintero, y al de cada día de electricista y z al de cada día de fontanero. Para que nadie pague ni cobre por la reparación deben igualarse los pagos de días en cada casa con lo que cobra cada uno por su trabajo globalmente. El carpintero trabaja en total 10 días (2 en su propia casa, 4 en la del carpintero y 4 en la del fontanero) y en su casa se necesitan, además de sus propias 2 días, 1 día del electricista y 6 días del fontanero, por lo tanto se obtiene la ecuación siguiente:

$$10x = 2x + y + 6z$$

de la misma forma, con respecto al electricista se obtiene la ecuación

$$10y = 4x + 5y + z$$

y respecto al fontanero

$$10z = 4x + 4y + 3z$$

por lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} -8x + y + 6z = 0 \\ 4x - 5y + z = 0 \\ 4x + 4y - 7z = 0 \end{array} \right\}$$

Que resolveremos calculando la escalonada reducida de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 8 \\ 0 & 9 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3']{F_2/(-9)} \begin{pmatrix} 1 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1']{F_2/(-9)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -31/36 \\ 0 & 1 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la solución sería de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{31}{36}\alpha \\ y = \frac{8}{9}\alpha \\ z = \alpha \end{array} \right\}$$

Como $x, y, z \in [6000, 8000]$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$\left. \begin{array}{l} 6000 \leq \frac{31}{36}\alpha \leq 8000 \rightarrow \frac{36 \cdot 6000}{31} \leq \alpha \leq \frac{36 \cdot 8000}{31} \\ 6750\alpha \leq 9000 \rightarrow \frac{9 \cdot 6000}{8} \leq \alpha \leq \frac{9 \cdot 8000}{8} \\ 6000 \leq \alpha \leq 8000 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in [6967,74, 8000]$$