

NOMBRE:

Nº:

Problema 1 (1.5 puntos) Un conjunto de puntos $P_k \in \mathbb{R}^3$ con $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ se mueven en el espacio, en tiempo discreto, de forma que la relación entre la posición de P_k en la etapa n y en la etapa $n-1$ viene dada por las ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} x_n^k &= \frac{k}{3}x_{n-1}^k - \frac{4k}{3}z_{n-1}^k \\ y_n^k &= \frac{k}{6}x_{n-1}^k + \frac{k}{2}y_{n-1}^k + \frac{5k}{6}z_{n-1}^k \\ z_n^k &= kz_{n-1}^k \end{aligned} \right\}$$

donde (x_n^k, y_n^k, z_n^k) representan las coordenadas del punto P_k en la n -ésima etapa. Se pide:

- (1.a) Dar la posición del punto P_k en la etapa n en función de su posición inicial (x_0^k, y_0^k, z_0^k) .
- (1.b) Dar todos los valores de k que hagan que existan posiciones iniciales para las cuales el punto P_k permanezca siempre en la misma posición. ¿Cuáles serían dichas posiciones iniciales?
- (1.c) Llamando X_n^k a las coordenadas del punto P_k en la etapa n , calcúlese los valores de $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ para los que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^k$ tenga las tres coordenadas finitas. Para cada valor de k obtenido ¿existen posiciones iniciales para que dicho límite sea $(-2, 1, 1)$?

Solución:

- (1.a) Matricialmente el problema puede plantearse como sigue:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_n^k \\ y_n^k \\ z_n^k \end{pmatrix}}_{X_n^k} = \underbrace{\begin{pmatrix} k/3 & 0 & -4k/3 \\ k/6 & k/2 & 5k/6 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_{n-1}^k \\ y_{n-1}^k \\ z_{n-1}^k \end{pmatrix}}_{X_{n-1}^k}$$

Por lo tanto, lo que se pide se calcula a través de la potencia n -ésima de la matriz A , ya que:

$$X_n^k = AX_{n-1}^k = A^2X_{n-2}^k = A^3X_{n-3}^k = \dots = A^nX_0^k$$

Para calcular dicha potencia se diagonaliza la matriz A , y se obtiene que si $A = PDP^{-1}$ entonces

$$A^n = P \underbrace{DP^{-1}PD}_{I} \underbrace{DP^{-1}PD}_{I} \dots \underbrace{DP^{-1}PD}_{I} P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

Cálculo del polinomio característico de A :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} k/3 - \lambda & 0 & -4k/3 \\ k/6 & k/2 - \lambda & 5k/6 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{pmatrix} = (k - \lambda) \left(\frac{k}{2} - \lambda \right) \left(\frac{k}{3} - \lambda \right)$$

Cálculo de los subespacios propios:

$$S(k) = \{X / (A - kI)X = 0\}$$

Vamos a calcular una matriz escalonada asociada $A - kI$ (recordando que $k \neq 0$ y por tanto se puede dividir por k):

$$\begin{aligned} A - kI &= \begin{pmatrix} -\frac{2k}{3} & 0 & -\frac{4k}{3} \\ \frac{k}{6} & -\frac{k}{2} & \frac{5k}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \rightarrow 6F_2/k \\ F_2 \rightarrow 3F_1/k}]{\substack{F_1 \rightarrow 6F_2/k \\ F_2 \rightarrow 3F_1/k}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2 \rightarrow -F_2/6} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obteniendo la solución siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \end{array} \right\} \rightarrow S(k) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

De la misma forma se obtiene $S\left(\frac{k}{2}\right) = \{X / (A - \frac{k}{2})X = 0\}$ así que debemos calcular la escalonada reducida de la matriz $A - \frac{k}{2}I$:

$$\begin{aligned} A - \frac{k}{2}I &= \begin{pmatrix} -\frac{k}{6} & 0 & -\frac{4k}{3} \\ \frac{k}{6} & 0 & \frac{5k}{6} \\ 0 & 0 & \frac{k}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \rightarrow -6F_1/k \\ F_2 \rightarrow 6F_2/k \\ F_3 \rightarrow 2F_3/k}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obteniendo la solución siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow S\left(\frac{k}{2}\right) = \langle (0, 1, 0) \rangle$$

Por último calcularemos $S\left(\frac{k}{3}\right) = \{X / (A - \frac{k}{3})X = 0\}$ así que debemos calcular la escalonada reducida de la matriz $A - \frac{k}{3}I$:

$$\begin{aligned} A - \frac{k}{3}I &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{4k}{3} \\ \frac{k}{6} & \frac{k}{6} & \frac{5k}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2k}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \rightarrow -3F_1/(4k) \\ F_2 \rightarrow 6F_2/k \\ F_3 \rightarrow 3F_3/(2k)}]{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\substack{F_3 - F_2 \\ F_1 - 5F_2}]{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Obteniendo la solución siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow S\left(\frac{k}{3}\right) = \langle (1, -1, 0) \rangle$$

De esta forma, llamando

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{3} \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{k}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{3}\right)^n & 0 & -2k^n + 2\left(\frac{k}{3}\right)^n \\ \left(\frac{k}{2}\right)^n - \left(\frac{k}{3}\right)^n & \left(\frac{k}{2}\right)^n & k^n + \left(\frac{k}{2}\right)^n - 2\left(\frac{k}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & k^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma,

$$X_n^k = A^n X_0^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{3}\right)^n x_0^k + \left[-2k^n + 2\left(\frac{k}{3}\right)^n\right] z_0^k \\ \left[\left(\frac{k}{2}\right)^n - \left(\frac{k}{3}\right)^n\right] x_0^k + \left(\frac{k}{2}\right)^n y_0^k + \left[k^n + \left(\frac{k}{2}\right)^n - 2\left(\frac{k}{3}\right)^n\right] z_0^k \\ k^n z_0^k \end{pmatrix}$$

- (1.b) Se piden puntos para los que 1 sea valor propio de la matriz A , es decir, $k = 1$, para el que las posiciones iniciales son los vectores propios asociados a 1, es decir, $(-2\alpha, \alpha, \alpha)$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $k = 2$, para los que las posiciones iniciales pedidas son $(0, \beta, 0)$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y $k = 3$, para el que las posiciones iniciales pedidas son $(\delta, -\delta, 0)$ con $\delta \in \mathbb{R}$.
- (1.c) El límite pedido tiene las tres coordenadas finitas sólo si $k = 1$, ya que en otro caso se obtienen progresiones geométricas con razón mayor que 1, que tienden a infinito. En este caso, la posición a la que tienden es: $(-2z_0^1, z_0^1, z_0^1)$ es decir, debemos tomar $z_0^1 = 1$, y las posiciones iniciales pedidas serían $(a, b, 1)$ con $a, b \in \mathbb{R}$