

(3) (1.25 puntos) Se consideran las matrices $A, G \in M_n(\mathbb{R})$, el espacio $\mathbb{R}^n$ y en él la base canónica $\mathcal{B}$. Si la matriz G está asociada a un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ respecto de dicha base $\mathcal{B}$, responda a las siguientes cuestiones:

- (3.a) Si A es simétrica y $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es A ¿puede asegurarse que T es un operador simétrico? si la respuesta es afirmativa demuéstrese, en caso contrario busque un contraejemplo que lo niegue.
- (3.b) Si A es ortogonal y $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es A ¿puede asegurarse que T es un operador ortogonal? si la respuesta es afirmativa demuéstrese, en caso contrario busque un contraejemplo que lo niegue.
- (3.c) Supóngase ahora $n = 3$, $G = I$ y que la matriz A es simétrica y ortogonal con $\det(A) > 0$. Clasifica todos los posibles endomorfismos $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica sea A .

Solución:

- (3.a) Es falso, sería cierto si $G = I$, pero no en general. Como contraejemplo, tómese $n = 2$,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que verifican las hipótesis dadas, ya que G cumple el criterio de Sylvester y A es simétrica, sin embargo

$$GA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

el operador no es simétrico, ya que GA no es simétrica.

- (3.b) Es falso, sería cierto si $G = I$, pero no en general. Como contraejemplo, tómese $n = 2$, Como contraejemplo, tómese $n = 2$,

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que verifican las hipótesis dadas, ya que G cumple el criterio de Sylvester y A es ortogonal, sin embargo

$$A^t GA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq G$$

- (3.c) Si $G = I$ el operador asociado es ortogonal y simétrico, igual que la matriz A , por ser simétrico es diagonalizable, y por ser ortogonal, los únicos valores propios que puede tener son 1 y -1 , por lo tanto, existe una base ortonormal de vectores propios, en dicha base tenemos las siguientes opciones (recordando que el determinante es positivo, es decir, 1) para la matriz asociada a T :

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El primer caso es la identidad, o también un giro de ángulo 0° , el segundo caso corresponde a un giro de ángulo π , ya que $\cos(\alpha) = -1$ y $\sin(\alpha) = 0$