

(2) (1.5 puntos) Supóngase que en una economía los sectores carbón, electricidad y acero se relacionan como sigue:

El gasto en la producción total de electricidad es el 40 % de la producción total de carbón, el 50 % de la producción total de acero y el 10 % de la producción total de electricidad, el gasto en la producción total de carbón es el 60 % de la producción total de electricidad y el 40 % de la producción de acero y, por último, el gasto en la producción total de acero es el 60 % de la producción total de carbón, el 20 % de la producción total de electricidad y el 20 % de la producción total de acero.

Denotando la producción total de carbón, acero y electricidad por p_c , p_a y p_e , y el gasto en la producción por g_c , g_a y g_e , respectivamente, calcular los precios para que los gastos en la producción en cada sector igualen a la producción de este mismo sector. ¿Cuál debe ser la producción anual, en millones de euros, de electricidad y carbón para que la producción anual de acero sea de 500 millones de euros?

Planteamos el sistema que expresa el gasto de cada sector en función de la producción

$$\begin{cases} g_e = 0,4p_c + 0,5p_a + 0,1p_e \\ g_c = 0,4p_a + 0,6p_e \\ g_a = 0,6p_c + 0,2p_a + 0,2p_e \end{cases}$$

Para calcular los precios de equilibrio para que los gastos en la producción igualen a la producción de cada sector, debemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} p_e = 0,4p_c + 0,5p_a + 0,1p_e \\ p_c = 0,4p_a + 0,6p_e \\ p_a = 0,6p_c + 0,2p_a + 0,2p_e \end{cases}$$

que es equivalente al siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 0 = 0,4p_c + 0,5p_a - 0,9p_e \\ 0 = -p_c + 0,4p_a + 0,6p_e \\ 0 = 0,6p_c - 0,8p_a + 0,2p_e \end{cases}$$

que resolveremos aplicando el método de Gauss a la matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,5 & -0,9 \\ -1 & 0,4 & 0,6 \\ 0,6 & -0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ -10 & 4 & 6 \\ 6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 0 & \frac{66}{4} & -\frac{66}{4} \\ 0 & -\frac{62}{4} & \frac{62}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Multiplicamos las tres filas de la matriz de coeficientes por 10

2 Sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por $\frac{10}{4}$, y a la tercera fila la primera multiplicada por $-\frac{3}{2}$

3 Mutiplicamos la segunda fila por $\frac{4}{66}$ y la tercera fila por $\frac{4}{62}$

4 Sumamos a la tercera fila la segunda

Por tanto, el sistema homogéneo inicial es equivalente al siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} 4p_c + 5p_a - 9p_e = 0 \\ p_a - p_e = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $p_a = p_e = p_c$.

Para que la producción anual de acero sea de 500 millones de euros, la producción anual de electricidad y de carbón debe ser también de 500 millones de euros.