

NOMBRE:

Nº:

(1) (1.25 puntos)

(1.a) Decir, de forma razonada, cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$

$$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 3x_4 = 2, x_1 - x_3 = 0\}$$

$$E_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$$

Cuando el conjunto sea subespacio vectorial, calcular la dimensión y una base del mismo y de un subespacio suplementario.

(1.b) Enunciar el teorema de la base incompleta.

(1.c) Demostrar que si $V_1, V_2 \leq V$, entonces $V_1 \cap V_2 \leq V$. ¿Es $V_1 \cup V_2 \leq V$? Demostrarlo o negarlo con un contraejemplo.(1.a) E_1 no es un subespacio porque no contiene al vector nulo. E_2 si es un subespacio vectorial, ya que cumple la caracterización de subespacio

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E_2 \text{ y } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in E_2$$

Veámoslo:

Sean $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E_2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha (x_1, x_2, x_3, x_4) + \beta (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

y como $x_1 - x_4 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$ e $y_1 - y_4 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$, se tiene

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \alpha (x_1, x_2, x_2, x_1) + \beta (y_1, y_2, y_2, y_1) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1)$$

que verifica las ecuaciones del conjunto E_2 (primera y cuarta coordenadas iguales y segunda y tercera coordenadas iguales), por tanto $E_2 \leq \mathbb{R}^4$.

Puesto que E_2 está definido por dos ecuaciones implícitas y es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, su dimensión será dos. Ya que los vectores de E_2 son del tipo (x_1, x_2, x_2, x_1) , una base puede ser

$$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$$

Para calcular una base de un suplementario de E_2 , utilizaremos el teorema de la base incompleta y buscaremos dos vectores de $\mathbb{R}^4$ linealmente independientes de los de la base de E_2 . Una base de un suplementario puede ser

$$\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

(1.b) Teorema de la base incompleta: Sea $V_1 \leq V$ con $\dim V_1 = p$. Todo sistema de k vectores de V_1 linealmente independiente, se puede completar con $p - k$ vectores de V_1 hasta formar una base de V .(1.c) Veamos que si $V_1, V_2 \leq V$, entonces $V_1 \cap V_2 \leq V$. Para ello debemos probar que

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_1 \cap V_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V_1 \cap V_2$$

$$\text{Sean } \vec{u}, \vec{v} \in V_1 \cap V_2 \rightarrow \begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \in V_1 \\ \wedge \\ \vec{u}, \vec{v} \in V_2 \end{cases} \xrightarrow{1} \begin{cases} \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V_1 \\ \wedge \\ \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V_2 \end{cases} \rightarrow \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \in V_1 \cap V_2$$

1 Porque $V_1, V_2 \leq V$ $V_1 \cup V_2 \leq V$ es falso. Veámoslo con un contraejemplo:Sean $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$ y $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

$$V_1 \cup V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \in V_1 \text{ o } (x, y) \in V_2\}$$

Sean $(1, 1)$ y $(0, 2)$ dos elementos de $V_1 \cup V_2$ y $\alpha = \beta = 1$ dos escalares de $\mathbb{R}$

$$\alpha (1, 1) + \beta (0, 2) = (1, 3) \notin V_1 \cup V_2$$

ya que $(1, 3) \notin V_1$ y $(1, 3) \notin V_2$.