

Problema 2 (1.25 puntos) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & x & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

las matrices asociadas a un endomorfismo T y a un producto escalar en la base canónica, respectivamente. Se pide:

- Calcular los valores de x par los que T es un operador simétrico.
- Calcular el polinomio característico de T .
- Encontrar una base ortonormal de vectores propios de T .

SOLUCIÓN:

(a) Para que T sea simétrico debe cumplirse que la matriz GA sea simétrica:

$$GA = \begin{pmatrix} 9 & -15-3x & -5 \\ -9 & 15+2x & 3 \\ -5 & 9+3x & 5 \end{pmatrix}$$

Para que sea simétrica debe verificarse $-15-3x = -9$, $9+3x = 3$ de donde $x = -2$ es la única solución.

(b) Cálculo del polinomio característico:

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ 2-\lambda & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

(c) Los subespacios propios de un operador simétrico son ortogonales entre sí, así calculando una base ortogonal de cada uno de ellos, obtendremos una base ortogonal del espacio total. Tras esto sólo deberemos dividir cada vector por su longitud y tendremos resuelto el apartado:

$$S(1) = \ker(A - I)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2}z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

de donde $S(1) = \langle (3, 2, 2) \rangle$.

$$S(2) = \ker(A - 2I)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{ x - y - z = 0 \}$$

El espacio es de dimensión 2. Un vector de la base puede ser: $(1, 1, 0)$. Para calcular el segundo vector vamos a calcular un vector que cumpla la ecuación anterior, para asegurar que está en el subespacio, y además que sea ortogonal al que hemos seleccionado, es decir que cumpla también la ecuación:

$$(1, 1, 0) \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow y - z = 0$$

Y el otro vector puede ser $(2, 1, 1)$

Una base ortogonal de vectores propios sería:

$$B = \{(3, 2, 2), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$$

Calculemos las longitudes:

$$|(3, 2, 2)|^2 = (3, 2, 2) \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$|(1, 1, 0)|^2 = (1, 1, 0) \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$|(2, 1, 1)|^2 = (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -5 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

y la base B es ortonormal.