

Cuestión 3 (1.5 puntos) Un empresario puede fabricar hasta tres tipos de productos químicos: A, B y C. Cada producto debe pasar por dos máquinas de procesamiento: X e Y. Los productos ocupan los siguientes tiempos de máquinas X e Y:

(a) Una tonelada de A necesita 2 horas en la máquina X y 2 horas en la máquina Y

(b) Una tonelada de B necesita 3 horas en la máquina X y 2 horas en la máquina Y

(c) Una tonelada de C necesita 4 horas en la máquina X y 3 horas en la máquina Y

La máquina X tiene disponibles 80 horas a la semana y la máquina Y 60 horas. Dado el precio de las máquinas, la dirección no quiere que permanezcan inactivas, por lo que desearía saber la cantidad de toneladas que debe obtener de cada producto de modo que las máquinas se utilicen a toda su capacidad, suponiendo que le empresario quiere vender la mayor cantidad posible de productos.

Justifíquese la respuesta.

SOLUCIÓN:

Llamaremos a al número de toneladas del producto A que se fabricará, b al de B y c al de C. La máquina X dedicará a la producción 80 horas semanales, que se distribuirá con 2 horas por tonelada de A, 3 por tonelada de B y 4 por tonelada de C, lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

$$80 = 2a + 3b + 4c$$

De la misma forma se razona para la máquina Y:

$$60 = 2a + 2b + 3c$$

Empezaremos por resolver el sistema a partir de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 80 \\ 2 & 2 & 3 & 60 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 80 \\ 0 & -1 & -1 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & -1 & -1 & -20 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 20 \end{array} \right)$$

Así se tienen la solución paramétrica siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} a = 10 - \frac{\alpha}{2} \\ b = 20 - \alpha \\ c = \alpha \end{array} \right\}$$

Como a , b y c deben ser positivas, ya que es el número de toneladas de un producto:

$$0 \leq \alpha; \quad 0 \leq 20 - \alpha; \quad 0 \leq 10 - \frac{\alpha}{2}$$

y se obtiene que $0 \leq \alpha \leq 20$. Si queremos que la suma de las toneladas sea lo mayor posible, se tiene que la suma de ellas sea máxima:

$$\alpha + 20 - \alpha + 10 - \frac{\alpha}{2} = 30 - \frac{\alpha}{2}$$

que es máximo si $\alpha = 0$, es decir, si se fabrican 10 toneladas de a , 20 de b y no se fabricará c .