



1. Ejercicios

Ejercicio 1 En $\mathbb{R}^2$, referido a la base canónica, se consideran los vectores $\vec{u}_1 = (1, -1)$ y $\vec{u}_2 = (2, 3)$. Un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$, T los transforma en los vectores $\vec{v}_1 = (-2, 1)$ y $\vec{v}_2 = (3, -1)$ respectivamente. Se pide:

- Matriz asociada a T en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$
- Matriz asociada a T en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$
- A la vista de los resultados anteriores ¿se puede asegurar que las matrices asociadas a una transformación regular lineal en una base cualquiera y en su transformado son iguales? ¿por qué?

Ejercicio 2 En $\mathbb{R}^3$ se define el endomorfismo T por las ecuaciones $y_1 = x_2 + x_3$; $y_2 = x_1 + x_3$; $y_3 = x_1 + x_2$. Probar que $\mathcal{U}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $\mathcal{U}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_2 = x_3\}$ son subespacios suplementarios y cumplen $T(\mathcal{U}_i) \subseteq \mathcal{U}_i$. Elíjase, en caso de que sea posible es posible, una base de $\mathbb{R}^3$ de forma que la matriz asociada a T en dicha base sea diagonal.

Ejercicio 3 Se considera un endomorfismo T de $\mathbb{R}^4$ del que se conoce:

- Un vector propio asociado al valor propio 1 es el $(1, 1, 0, -1)$.
- Un vector propio asociado al valor propio 2 es el $(0, 1, 0, 0)$.
- Las imágenes de $(0, 1, 1, 1)$ y $(0, -1, 1, 2)$ son respectivamente $(0, 4, -1, 2)$ y $(0, 0, -2, 3)$.

Se pide:

- Matriz asociada a T en la base canónica.
- Dar una base de $\ker T$.
- Ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio imagen.
- Polinomio característico.

Ejercicio 4 Dada una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$, se considera el endomorfismo T que admite como vectores propios $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ y $\vec{v}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, asociados a valores propios distintos. Hallar la matriz del endomorfismo T en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ sabiendo que $T(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4) = 6\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3 + 8\vec{e}_4$.

Ejercicio 5 En $\mathbb{R}_3[x]$ se define la aplicación T por $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = dx^3 + cx^2 + bx + a$.

- Probar que T es un endomorfismo.
- Determinar la matriz de T en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
- Hallar una base donde la matriz asociada a T sea diagonal, y calcular dicha matriz.

Ejercicio 6 Diagonalizar las matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7 Calcular la potencia n -ésima de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 8 Sea el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

en el que se define el endomorfismo T como sigue

$$A = \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \mapsto T(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$$

- Hallar la matriz asociada a T respecto de las tres matrices dadas.
- Hallar $\ker T$ y $T(E)$.
- Calcular una base de E en la cuál la matriz asociada sea diagonal.

Ejercicio 9 En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define la aplicación $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se pide:

- Demostrar que T es un endomorfismo de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calcular $\ker T$.
- Compruébese que T es una proyección.
- En el caso $n = 2$, calcular la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y estudiar su diagonalización, dando, si es posible, la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en la cual la matriz asociada a T sea diagonal.

Ejercicio 10 Supongamos que hay tres centros principales de camiones en Gijón, Valencia y Salamanca. Cada semana la mitad de los camiones que están en Valencia y en Salamanca van a Gijón, la otra mitad permanece donde está, y de los camiones de Gijón la mitad se va a Valencia y la mitad a Salamanca. Exprésese en términos matriciales problema de cálculo del número de camiones que se encuentran en la semana n en cada ciudad (sin resolver). Sabiendo que inicialmente en Gijón hay 100 camiones, calcúlese el número de camiones que debe haber originalmente en Salamanca y en Valencia para que el número de camiones de cada ciudad no se modifique con el paso de las semanas.

Ejercicio 11 Supongamos que hay una epidemia en la que cada mes enferma la mitad de los individuos que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos. Encuéntrese un estado inicial que haga que el número de sanos, el número de enfermos y el número de muertos no cambie, suponiendo que el número total de individuos es 100000.

Ejercicio 12 Revisando los donativos de una cierta sociedad se observa que el 80% de las personas que contribuyeron en un cierto año contribuirán también al año siguiente, y que el 30% de los que no contribuyen en ese año sí lo harán al año siguiente. ¿Cuántos miembros contribuirán a largo plazo si la sociedad está compuesta por 5000 miembros y originalmente contribuyen todos?

Ejercicio 13 Un conjunto de puntos $P_k \in \mathbb{R}^3$ con $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ se mueven en el espacio, en tiempo discreto, de forma que la relación entre la posición de P_k en la etapa n y en la etapa $n - 1$ viene dada por las ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} x_n^k &= \frac{k}{3}x_{n-1}^k - \frac{4k}{3}z_{n-1}^k \\ y_n^k &= \frac{k}{6}x_{n-1}^k + \frac{k}{2}y_{n-1}^k + \frac{5k}{6}z_{n-1}^k \\ z_n^k &= kz_{n-1}^k \end{aligned} \right\}$$

donde (x_n^k, y_n^k, z_n^k) representan las coordenadas del punto P_k en la n -ésima etapa. Se pide:

- Dar la posición del punto P_k en la etapa n en función de su posición inicial (x_0^k, y_0^k, z_0^k) .
- Dar todos los valores de k que hagan que existan posiciones iniciales para las cuales el punto P_k permanezca siempre en la misma posición. ¿Cuáles serían dichas posiciones iniciales?



3. Llamando X_n^k a las coordenadas del punto P_k en la etapa n , calcúlese los valores de $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ para los que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^k$ tenga las tres coordenadas finitas. Para cada valor de k obtenido ¿existen posiciones iniciales para que dicho límite sea $(-2, 1, 1)$?

Ejercicio 14 Un punto se mueve en el espacio en tiempo discreto de forma que la relación entre su posición en el instante $n+1$ y la que tenía en el instante n viene dada por las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{5}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= \frac{-3}{2}x_n - 2y_n \\ z_{n+1} &= -6x_n - 6y_n - \frac{1}{2}z_n \end{aligned} \right\}$$

donde (x_n, y_n, z_n) representan las coordenadas del móvil en la n -ésima transición. Se pide:

- Demostrar que si la posición inicial del móvil (x_0, y_0, z_0) está situado sobre el plano de ecuación $x + y = 0$, la posición final (x_n, y_n, z_n) , cuando n crece indefinidamente, coincide con el origen de coordenadas.
- Demostrar que si la posición inicial del móvil (x_0, y_0, z_0) está situada sobre la recta de ecuación $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, el móvil ocupa siempre dicha posición inicial.

Ejercicio 15 En $\mathbb{R}^3$ referido a la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ se considera el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del que se sabe:

- El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es el plano $x_1 + x_2 = 0$
- $T(\vec{v}) = \vec{w}$, siendo $\vec{v} = (3, 2, 1)$, $\vec{w} = (6, 4, 7)$.

Se pide:

- Calcular la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$.
- ¿Es T un automorfismo?
- Calcúlese la imagen del subespacio de ecuaciones $\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$.
- Demuéstrese que T no es diagonalizable.

Ejercicio 16 Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar $\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$: si $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

(coordenadas respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$). Se define en $\mathbb{R}^3$ el operador T cuya matriz asociada en esta base es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- ¿Es simétrico el operador T ?
- Si es posible, encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, formada por vectores propios de T .

Ejercicio 17 En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ con el producto escalar asociado al cuadrado escalar:

$$(x, y, z)^2 = 2x^2 + 2xy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$$

se considera el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como sigue:

$$T(x, y, z) = \left(3x - y + z, -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z, x + \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}z \right)$$



- a) Demuestre que T es un operador simétrico
b) Calcule una base ortonormal que diagonalice T

Ejercicio 18 Calcular los valores de $a, b \in \mathbb{Z}$ para los cuales el operador de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

es simétrico para el producto cuyo cuadrado escalar es $(x, y, z)^2 = (1 + a^2)x^2 + 2a^2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4bxz$

Ejercicio 19 Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un operador ortogonal tal que $T(1, 0) = (1, -1)$, $T(0, 1) = (2, -1)$. Sabiendo que $\|(1, 0)\| = \sqrt{2}$, calcúlese la matriz del producto escalar en la base canónica.

Ejercicio 20 En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (-1, 0, 1), \vec{u}_2 = (1, 0, -2), \vec{u}_3 = (0, 1, 0)\}$ la base canónica $\mathcal{B}_c$ y el producto escalar $\cdot$ para el que la base $\mathcal{B}_1$ es ortogonal y además $\|\vec{u}_1\| = 1$, $\|\vec{u}_2\| = 2$, $\|\vec{u}_3\| = 3$. Se pide:

- a) Hallar la matriz G del producto escalar $\cdot$ respecto de la base $\mathcal{B}$.
b) Dado el operador T del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ definido por $T(\vec{e}_1) = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$, $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2$, $T(\vec{e}_3) = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$, indicar razonadamente si T es un operador ortogonal o no.

Ejercicio 21 En $\mathbb{R}^3$ espacio euclídeo, con el producto escalar habitual, se considera $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que en la base canónica tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}$$

¿es T un operador ortogonal?

Ejercicio 22 Encuentre en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ la matriz asociada a la simetría ortogonal con respecto a la recta $2x - y = 0$

Ejercicio 23 Sea E un espacio euclídeo de dimensión 3, la base ortonormal $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y $f: E \rightarrow E$ el endomorfismo que cumple:

$$3f(\vec{e}_1) = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad 3f(\vec{e}_2) = \alpha\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad 3f(\vec{e}_3) = \beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

Hállese α , β y γ de manera que f sea un operador ortogonal. Calcúlese la matriz de f en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 24 Sea T el operador que a un vector de $\mathbb{R}^3$ le asigna su simétrico respecto del plano $2x + y + z = 0$, calcúlese la matriz asociada a T en la base canónica.

Ejercicio 25 En $\mathbb{R}^3$ se considera el operador que en la base canónica tiene asociada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Clasifique el operador y describa y de sus elementos característicos.



Ejercicio 26 Calcule el operador ortogonal T de $\mathbb{R}^3$ que a un vector $\vec{v}$ le hace corresponder el girado $\frac{\pi}{2}$ respecto de la recta $x = y = z$ en sentido antihorario visto desde el punto $(1, 1, 1)$

Ejercicio 27 Determine las ecuaciones de la simetría de $\mathbb{R}^3$ respecto de $\langle (2, 1, 1) \rangle^\perp$

Ejercicio 28 Describa el operador $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con matriz asociada en la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Describa sus elementos característicos.

Ejercicio 29 En $\mathbb{R}^3$ calcula el endomorfismo G que a cada vector le asigna su girado respecto de la recta $x + y = z = x$ un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ en sentido antihorario visto desde el punto $(-1, 0, -1)$. Calcula la matriz asociada en la base canónica. Calcula el vector $T(1, 3, 5)$.

Ejercicio 30 Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

Clasifícalo, calcula sus elementos principales y descríbelo geoméricamente.

2. Cuestiones

Cuestión 1 Sea T un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V . Probar que el conjunto de vectores $\vec{v}$ de V que verifican $T(\vec{v}) = \vec{v}$, constituyen un subespacio vectorial de E . Calcular la intersección de dicho subespacio con el núcleo de T .

Cuestión 2 Caracterícese en una base la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que tenga por núcleo y por imagen el mismo subespacio.

Cuestión 3 Sea T un endomorfismo definido sobre el espacio vectorial E . Probar que si λ es valor propio de T , entonces λ^p lo es del endomorfismo T^p , y que si T es inyectivo, T^{-1} tiene por valores propios los inversos de los valores propios de T .

Cuestión 4 Sean T_1 y T_2 dos endomorfismos definidos sobre el mismo espacio vectorial de dimensión finita, V y tales que T_1 es biyectivo. ¿Tienen $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$ los mismos valores propios? Razónese la respuesta.

Cuestión 5 Sea E un espacio euclídeo tal que en una cierta base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ el producto escalar tiene asociada la matriz G . Determinar la transformación ortogonal $T: E \rightarrow E$ que cumple $T^2 + T = 0$.

Cuestión 6 Demuestre o niegue con un contraejemplo las afirmaciones siguientes:

a) Si A es una matriz ortogonal $n \times n$, entonces $\text{rg}(A) < n$



b) Si A es diagonalizable, y λ es valor propio de A , entonces $\dim S(\lambda) = 1$

c) $\det(A) \neq 0$

d) Si A es una matriz de orden $n \times n$, $\vec{v}$ es un vector propio suyo asociado a λ , y $\vec{w}$ es otro vector propio asociado a α , entonces $\vec{v} + \vec{w}$ es un vector propio asociado a $\lambda + \alpha$.

Cuestión 7 Sea V un espacio vectorial de dimensión n , $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo diagonalizable y $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de vectores propios de f . Llamando $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n$, compruébese que los vectores:

$$\vec{e}_1 = \vec{u}, \vec{e}_2 = f(\vec{u}), \vec{e}_3 = f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u}), \vec{e}_4 = f(f(f(\vec{u}))) = f^3(\vec{u}), \dots, \vec{e}_n = f^{n-1}(\vec{u})$$

forman una base de V .

Cuestión 8 En $\mathbb{R}^2$ calcula la expresión de la simetría respecto de la recta $y = mx$.

Cuestión 9 Caracterícese la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que tiene por imagen el subespacio de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y por núcleo $x_1 = x_2 = x_3$, puede darse esta en una base cualquiera, especificando la base utilizada.

Cuestión 10 Calcúlese respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz de un endomorfismo cuyo núcleo está engendrado por $(1, 2, -1)$ y cuyo subespacio imagen está engendrado por $T(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$ y $T(0, 1, 0) = (3, 0, -1)$.

Cuestión 11 En $\mathbb{R}^3$, caracterice la matriz de un endomorfismo que deja invariante los subespacios de ecuaciones $x_3 = 0$ y $x_1 = x_2 = 0$.

Cuestión 12 Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ antisimétrica. Prueba que el único valor propio que puede tener es el 0.