

## Tema 4: Endomorfismos

Marisa Serrano,  
Zulima Fernández

Universidad de Oviedo

11 de enero de 2010

email: `mlserrano@uniovi.es`

# Índice

## 1 Introducción a los endomorfismos

# Índice

- 1 Introducción a los endomorfismos
- 2 Diagonalización de endomorfismos

# Índice

- 1 Introducción a los endomorfismos
- 2 Diagonalización de endomorfismos
- 3 Operadores simétricos

# Índice

- 1 Introducción a los endomorfismos
- 2 Diagonalización de endomorfismos
- 3 Operadores simétricos
- 4 Operadores ortogonales
  - Operadores ortogonales en espacios de dimensión dos
  - Operadores ortogonales en espacios euclídeos de dimensión tres

# Definición

## Definición 4.1

*Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ –espacio vectorial, llamaremos endomorfismo de  $V$  a cualquier aplicación lineal en la que el conjunto inicial y el conjunto final sea  $V$ , es decir, cualquier aplicación lineal  $T: V \rightarrow V$ . Si un endomorfismo es biyectivo se dice que es un automorfismo.*

## Particularidades

Cuando se estudian las aplicaciones lineales de  $V$  en si mismo desde el punto de vista de los endomorfismos, se toma la misma base en  $V$  como espacio inicial y como espacio final.

## Particularidades

Cuando se estudian las aplicaciones lineales de  $V$  en si mismo desde el punto de vista de los endomorfismos, se toma la misma base en  $V$  como espacio inicial y como espacio final.

Otra particularidad importante es que los subespacios  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  están en el mismo espacio vectorial, lo que hace que podamos pensar en sumarlos e intersecarlos.



## Particularidades

Cuando se estudian las aplicaciones lineales de  $V$  en si mismo desde el punto de vista de los endomorfismos, se toma la misma base en  $V$  como espacio inicial y como espacio final.

Otra particularidad importante es que los subespacios  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  están en el mismo espacio vectorial, lo que hace que podamos pensar en sumarlos e intersecarlos.

Como el espacio inicial y el final coinciden, puede considerarse la composición de  $T \circ T$  a la que llamaremos  $T^2$ , o también, para la función compuesta  $p$  veces,  $\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{p \text{ veces}} = T^p$  cuya matriz

asociada en una cierta base será la potencia  $p$ -ésima de la matriz dada, es decir, si en una base  $B$  la matriz de  $T$  es  $M$ , la matriz de  $T^p$  en dicha base será  $M^p$ .

# Características de los endomorfismos

## Propiedades 4.1.1

$$\textcircled{1} \quad T: V \rightarrow V \text{ automorfismo} \leftrightarrow \ker T = \{\vec{0}\}$$

# Características de los endomorfismos

## Propiedades 4.1.1

- ①  $T: V \rightarrow V$  *automorfismo*  $\leftrightarrow \ker T = \{\vec{0}\}$
- ②  $T: V \rightarrow V$  *automorfismo*  $\leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

# Características de los endomorfismos

## Propiedades 4.1.1

- ①  $T: V \rightarrow V$  *automorfismo*  $\leftrightarrow \ker T = \{\vec{0}\}$
- ②  $T: V \rightarrow V$  *automorfismo*  $\leftrightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V$
- ③  $T: V \rightarrow V$  *automorfismo*  $\leftrightarrow$  *la matriz asociada a  $T$  en una base cualquiera es regular.*

# Características de los endomorfismos

## Propiedades 4.1.1

- 1  $T: V \rightarrow V$  automorfismo  $\leftrightarrow \ker T = \{\vec{0}\}$
- 2  $T: V \rightarrow V$  automorfismo  $\leftrightarrow \dim \text{Im } T = \dim V$
- 3  $T: V \rightarrow V$  automorfismo  $\leftrightarrow$  la matriz asociada a  $T$  en una base cualquiera es regular.
- 4  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  bases de  $V$ , matriz de paso  $P$ , entonces

$$\begin{array}{ccc}
 V_{\mathcal{B}_2} & \xrightarrow{M} & V_{\mathcal{B}_2} \\
 P \downarrow & \curvearrowright & \downarrow P \\
 V_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{A} & V_{\mathcal{B}_1}
 \end{array}
 \rightarrow A = PMP^{-1}$$

Dichas matrices verifican que  $\det(M) = \det(A)$ .

# Diagonalización de endomorfismos

Buscamos una base  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

# Diagonalización de endomorfismos

Buscamos una base  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

A la vista de la matriz que se busca, las imágenes de los vectores de la base deben ser de la forma:

$$T(\vec{e}_1) = d_1 \vec{e}_1, \quad T(\vec{e}_2) = d_2 \vec{e}_2, \dots, \quad T(\vec{e}_n) = d_n \vec{e}_n$$

# Valores y vectores propios: polinomio característico

## Definición 4.2

*Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ . Diremos que un vector  $\vec{v} \neq \vec{0}$  es un vector propio de  $T$  si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ .*

*Al escalar  $\lambda$  le llamaremos valor propio del endomorfismo.*



# Valores y vectores propios: polinomio característico

## Definición 4.2

*Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ . Diremos que un vector  $\vec{v} \neq \vec{0}$  es un vector propio de  $T$  si existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tal que  $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ .*

*Al escalar  $\lambda$  le llamaremos valor propio del endomorfismo.*

Al conjunto de todos los valores propios de un endomorfismo  $T$  se le llama espectro del endomorfismo y se denota por:

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} / \exists \vec{v} \neq \vec{0}, T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \right\}$$

# Subespacios propios

## Teorema 4.1

*Si  $T: V \rightarrow V$  es un endomorfismo de  $V$ , y  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un valor propio, el conjunto*

$$S_T(\lambda) = \{ \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \} = \ker(T - \lambda I)$$

*es un subespacio vectorial de  $V$  al que llamaremos subespacio propio. También suele denotarse a este subespacio por  $S_\lambda$  y por  $S(\lambda)$ .*

# ¿Cómo diagonalizamos?

- Cálculo del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

## ¿Cómo diagonalizamos?

- Cálculo del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

- Resolución de la ecuación característica:  $p(\lambda) = 0$

## ¿Cómo diagonalizamos?

- Cálculo del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$$

- Resolución de la ecuación característica:  $p(\lambda) = 0$
- Para cada  $\lambda$ , solución calculemos el subespacio propio resolviendo el sistema de ecuaciones:  $(A - \lambda I)X = [0]$

## Ejemplo 4.1

*Calcular la potencia  $n$ -ésima de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Ejemplo 4.1

*Calcular la potencia  $n$ -ésima de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Ejemplo 4.2

*Revisando los donativos de una cierta sociedad se observa que el 80 % de las personas que contribuyeron en un cierto año contribuirán también al año siguiente, y que el 30 % de los que no contribuyen en ese año sí lo harán al año siguiente ¿Cuántos miembros contribuirán a largo plazo si la sociedad está compuesta por 5000 miembros y originalmente contribuyen todos?*

### Ejemplo 4.3

*Supongamos que hay tres centros principales de camiones en Gijón, Valencia y Salamanca. Cada semana la mitad de los camiones que están en Valencia y en Salamanca van a Gijón, la otra mitad permanece donde está, y de los camiones de Gijón la mitad se va a Valencia y la mitad a Salamanca. Exprésese en términos matriciales problema de cálculo del número de camiones que se encuentran en la semana  $n$  en cada ciudad (sin resolver). Sabiendo que inicialmente en Gijón hay 100 camiones, calcúlese el número de camiones que debe haber originalmente en Salamanca y en Valencia para que el número de camiones de cada ciudad no se modifique con el paso de las semanas.*



# Propiedades de los subespacios propios

## Propiedades 4.2.2

Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ , y sea el espectro de  $T$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \exists \vec{v} \neq 0, T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$$

entonces:

$$\textcircled{1} \quad T(S_T(\lambda_i)) \subseteq S_T(\lambda_i), \forall i$$

# Propiedades de los subespacios propios

## Propiedades 4.2.2

Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ , y sea el espectro de  $T$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \exists \vec{v} \neq 0, T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$$

entonces:

- ①  $T(S_T(\lambda_i)) \subseteq S_T(\lambda_i), \forall i$
- ②  $S_T(\lambda_1) \oplus S_T(\lambda_2) \oplus \dots \oplus S_T(\lambda_p)$

# Condiciones necesarias y condiciones suficientes de diagonalización

## Teorema 4.2

*Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ , con  $\dim(V) = n$ , entonces  $T$  es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:*

# Condiciones necesarias y condiciones suficientes de diagonalización

## Teorema 4.2

Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ , con  $\dim(V) = n$ , entonces  $T$  es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- 1 El polinomio característico se descompone por completo en el cuerpo base, es decir:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{n_p}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$$

# Condiciones necesarias y condiciones suficientes de diagonalización

## Teorema 4.2

Sea  $T: V \rightarrow V$  un endomorfismo del espacio vectorial  $V$ , con  $\dim(V) = n$ , entonces  $T$  es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

- 1 El polinomio característico se descompone por completo en el cuerpo base, es decir:

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{n_p}, \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$$

- 2 Los subespacios propios verifican la condición siguiente:

$$\dim S(\lambda_i) = n_i \quad \forall i$$

### Ejemplo 4.4

Dado el endomorfismo  $T_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha - 1 & 0 & 2\alpha - 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 - \alpha & 0 & 2 - \alpha \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  es  $T_\alpha$  diagonalizable?

## Ejemplo 4.5

La matriz asociada a un endomorfismo  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en una cierta base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Se pide:

- 1 Decir los valores de  $a$  para los que el endomorfismo es diagonalizable.

## Ejemplo 4.5

La matriz asociada a un endomorfismo  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en una cierta base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0$$

Se pide:

- 1 Decir los valores de  $a$  para los que el endomorfismo es diagonalizable.
- 2 En los casos en que sea diagonalizable, calcular una base de vectores propios.



# Operadores simétricos

## Definición 4.3

Sea  $(E, \cdot)$  un espacio euclídeo, y sea  $T: E \rightarrow E$  un endomorfismo, se dice que es un operador simétrico si verifica la condición siguiente:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

# Operadores simétricos

## Definición 4.3

Sea  $(E, \cdot)$  un espacio euclídeo, y sea  $T: E \rightarrow E$  un endomorfismo, se dice que es un operador simétrico si verifica la condición siguiente:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$X^t G(AY) = (AX)^t GY \rightarrow X^t(GA)Y = X^t A^t GY \rightarrow GA = A^t G = (GA)^t$$

# Operadores simétricos

## Definición 4.3

Sea  $(E, \cdot)$  un espacio euclídeo, y sea  $T: E \rightarrow E$  un endomorfismo, se dice que es un operador simétrico si verifica la condición siguiente:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$X^t G(AY) = (AX)^t GY \rightarrow X^t(GA)Y = X^t A^t GY \rightarrow GA = A^t G = (GA)^t$$

Si  $G = I$ , entonces  $A$  es simétrica.

## Ejemplo 4.6

Sea  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ , el espacio euclídeo cuyo producto escalar tiene asociada en la base canónica la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se considera el endomorfismo cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcúlense los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  que hacen que el operador sea simétrico.

# Propiedades de los operadores simétricos

## Teorema 4.3

$T: V \rightarrow V$  operador simétrico,  $\rightarrow \ker(T) = (\operatorname{Im} T)^\perp$

# Propiedades de los operadores simétricos

## Teorema 4.3

$T: V \rightarrow V$  operador simétrico,  $\rightarrow \ker(T) = (\operatorname{Im} T)^\perp$

## Teorema 4.4

$T: V \rightarrow V$  simétrico,  $\alpha \neq \beta$  valores propios,  $S(\alpha) \perp S(\beta)$

# Propiedades de los operadores simétricos

## Teorema 4.3

$T: V \rightarrow V$  operador simétrico,  $\rightarrow \ker(T) = (\operatorname{Im} T)^\perp$

## Teorema 4.4

$T: V \rightarrow V$  simétrico,  $\alpha \neq \beta$  valores propios,  $S(\alpha) \perp S(\beta)$

## Teorema 4.5

*Todo operador simétrico es diagonalizable en una base ortonormal.*

# Operadores ortogonales

## Definición 4.4

*Un endomorfismo  $T: V \rightarrow V$  se dice que es un operador ortogonal si verifica la condición siguiente:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v})$$



# Operadores ortogonales

## Definición 4.4

*Un endomorfismo  $T: V \rightarrow V$  se dice que es un operador ortogonal si verifica la condición siguiente:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v})$$

$$A^t G A = G$$

# Operadores ortogonales

## Definición 4.4

*Un endomorfismo  $T: V \rightarrow V$  se dice que es un operador ortogonal si verifica la condición siguiente:*

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = T(\vec{u}) \cdot T(\vec{v})$$

$$A^t G A = G$$

$$\text{Si } G = I, A^t A = I \rightarrow A^{-1} = A^t$$

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1  *$T$  es un operador ortogonal*

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ①  *$T$  es un operador ortogonal*
- ②  *$T$  es un operador que conserva la longitud de los vectores y, en consecuencia, los ángulos*

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ①  *$T$  es un operador ortogonal*
- ②  *$T$  es un operador que conserva la longitud de los vectores y, en consecuencia, los ángulos*
- ③  *$T$  transforma bases ortonormales en bases ortonormales*

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- ①  *$T$  es un operador ortogonal*
- ②  *$T$  es un operador que conserva la longitud de los vectores y, en consecuencia, los ángulos*
- ③  *$T$  transforma bases ortonormales en bases ortonormales*

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.3

*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1  *$T$  es un operador ortogonal*
- 2  *$T$  es un operador que conserva la longitud de los vectores y, en consecuencia, los ángulos*
- 3  *$T$  transforma bases ortonormales en bases ortonormales*

*Si la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es ortonormal, la matriz asociada al producto escalar es la identidad, y se cumple que  $A^t A = I$ .*



# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.4

*Sea  $T: E \rightarrow E$  un operador ortogonal, entonces:*

- 1  $T$  es regular

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.4

Sea  $T: E \rightarrow E$  un operador ortogonal, entonces:

- ①  $T$  es regular
- ② El determinante de la matriz asociada en una base cualquiera es  $\pm 1$ . Por ello, los operadores ortogonales se clasifican en dos grupos:
  - **Directos** si el determinante es  $+1$ .
  - **Inversos** si el determinante es  $-1$ .

# Operadores ortogonales

## Propiedades 4.4.4

Sea  $T: E \rightarrow E$  un operador ortogonal, entonces:

- ①  $T$  es regular
- ② El determinante de la matriz asociada en una base cualquiera es  $\pm 1$ . Por ello, los operadores ortogonales se clasifican en dos grupos:
  - **Directos** si el determinante es  $+1$ .
  - **Inversos** si el determinante es  $-1$ .
- ③  $\sigma(T) \subseteq \{1, -1\}$ . Si la dimensión del espacio euclídeo es impar, entonces admite como autovalor a uno, al menos, de los valores propios  $1$  ó  $-1$ .



# Matrices ortogonales en $\mathbb{R}^2$

## Teorema 4.6

*Si  $A$  es una matriz ortogonal de orden 2 entonces  $\exists \alpha \in ]-\pi, \pi]$  tal que:*

- *Si  $\det(A) = 1$  entonces  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$*

# Matrices ortogonales en $\mathbb{R}^2$

## Teorema 4.6

*Si  $A$  es una matriz ortogonal de orden 2 entonces  $\exists \alpha \in ]-\pi, \pi]$  tal que:*

- *Si  $\det(A) = 1$  entonces  $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$*
- *Si  $\det(A) = -1$  entonces  $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix}$*

## Operadores ortogonales en espacios de dimensión 2

### Teorema 4.7

*$E$  espacio euclídeo,  $\dim E = 2$ ,  $T : E \rightarrow E$  operador ortogonal, existe una base ortonormal en la que la matriz de  $T$  es*

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

*para algún  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$ , y es un giro en sentido antihorario de ángulo  $\alpha$ , o bien*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*y es una simetría ortogonal .*

# Operadores ortogonales en espacios de dimensión tres

## Teorema 4.8

*$E$  espacio euclídeo,  $\dim E = 3$ ,  $T : E \rightarrow E$  operador ortogonal, existe una base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  tal que la matriz asociada a  $T$  en dicha base es*

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

*para algún  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$ , con  $\epsilon = 1$  si es ortogonal directa y  $\epsilon = -1$  si es ortogonal inversa.*