



Ejercicio 1 Indicar cuáles de las aplicaciones siguientes son cuadrados escalares

- a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$
- b) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$
- c) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$
- d) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$
- e) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
- f) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 4x_1x_3$

Ejercicio 2 Dada la aplicación $q_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$q_\alpha(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + (\alpha + 2)x_2^2 + (2\alpha - 1)x_3^2 + 4x_1x_2 + 2(2 - \alpha)x_2x_3 + 4x_1x_3$$

¿Para qué valores de α es un cuadrado escalar. Para dichos valores, calcule una base en la que la matriz del producto escalar del que procede sea diagonal.

Ejercicio 3 Decidir para qué valores de α la aplicación:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + \alpha x_2^2 + 2x_3^2 + \alpha x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_4$$

es un cuadrado escalar. Para dichos valores, calcule una base en la que la matriz del producto escalar del que procede sea diagonal.

Ejercicio 4 En $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación siguiente:

$$q_a(x, y, z) = 2x^2 - ay^2 - az^2 + 4xy - 4xz + 4yz$$

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se trata de un cuadrado escalar? Para cada valor de a obtenido, utilice el método de Gauss para calcular una base ortogonal para el producto escalar asociado al cuadrado escalar q_a . ¿Cuál es la matriz asociada al producto escalar en dicha base? ¿Cuáles son las longitudes de los vectores obtenidos? Calcule el coseno del ángulo formado por los vectores $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, -1)$.

Ejercicio 5 Dado el conjunto

$$A = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2 + \beta t^2 + 2xz + 2yt > 0, \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\vec{0}\} \right\}$$

Describese como producto cartesiano de intervalos en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6 En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar que, respecto de la base canónica está representado por la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilice el método de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal.

Ejercicio 7 Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$.

- a) Probar que la aplicación $\cdot: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $(A, B) \mapsto A \cdot B = \text{tr}(A^t B)$ es un producto escalar.



b) Encuentre la matriz asociada al producto escalar definido anteriormente tomando $n = 2$ y respecto de la base:
 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 8 Calcúlese la norma y el ángulo que forman las matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tomando como producto escalar el definido en el ejercicio 7, es decir, $A \cdot B = \text{tr}(A^t B)$

Ejercicio 9 En el espacio de los polinomios de coeficientes reales asociamos a dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ el escalar $P \cdot Q = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$. Se pide:

- Demuéstrese que $P \cdot Q$ es un producto escalar.
- Limitándonos al subespacio de polinomios de grado menor o igual que dos, hállese en la base $\{1, x, x^2\}$ la matriz de este producto escalar.
- Fórmese, por el método de ortogonalización de Schmidt, una base ortonormal a partir de la base dada en el apartado anterior.

Ejercicio 10 De las siguientes matrices solo una puede estar asociada a un producto escalar, ¿cuál? Razónese la respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar una base ortonormal para ese producto escalar.

Ejercicio 11 Determinar en $\mathbb{R}^4$ una base del subespacio $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$ y calcular su suplemento ortogonal.

Ejercicio 12 Se considera $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar cuyo cuadrado es

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xz$$

Determina una base del subespacio $\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$ y calcular su suplemento ortogonal.

Ejercicio 13 Se considera un espacio vectorial real V de dimensión 3, en el que se tiene definido un producto escalar que respecto de una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ verifica:

- $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}, |\vec{e}_2| = \sqrt{3}$.
- $U = \{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es ortogonal a $\langle \vec{e}_1 \rangle$.
- La proyección ortogonal de $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ sobre $\langle \vec{e}_2 \rangle$ es $3\vec{e}_2$.

Se pide dar la matriz G del producto escalar en función del menor número de parámetros que sean necesarios, imponiendo sobre ellos las condiciones que se precisen.

Ejercicio 14 En $\mathbb{R}^4$ descompóngase $\vec{v} = (2, 3, -1, 4)$ en suma de dos vectores: uno perteneciente al subespacio engendrado por los vectores $\vec{v}_1 = (2, 1, -1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (3, 1, 1, 0)$, y el otro ortogonal a dicho subespacio.



Ejercicio 15 En el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ se considera $H \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ y-t=0 \end{cases}$ Halle la matriz A asociada a π , proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre H , respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 16 En el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la base canónica

$$\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y el producto escalar $\cdot$ de matriz asociada, respecto de $\mathcal{B}$, $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

i) Hallar la matriz del producto escalar $\cdot$ en la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -14 & -4 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) Hallar una base ortogonal para $\cdot$, $\mathcal{B}_2 = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$, aplicando el método de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B}_1$.

iii) Hallar la proyección ortogonal de M_4 sobre $H = \langle M_1, M_2, M_3 \rangle$.

Ejercicio 17 Calcúlese los polinomios de segundo y de tercer grado que mejor aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados, a la función $f(x) = \sin(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$ Considerando el espacio euclídeo $V = \mathcal{C}^0([0, 1])$ con el producto escalar $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Ejercicio 18 Calcule los polinomios de segundo y de tercer grado que mejor aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados, a la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[-1, 1]$ Considerando el espacio euclídeo $V = \mathcal{C}^0([-1, 1])$ con el producto escalar $f \cdot g = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$

Ejercicio 19 Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcule la solución del sistema por mínimos cuadrados. Repetir el ejercicio pero ahora con los términos independientes $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

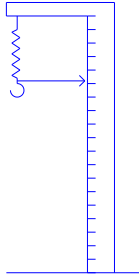
Ejercicio 20 Con la balanza de Jolly se puede calcular la constante recuperadora de un muelle. Supongamos que la longitud del muelle de la figura en posición de equilibrio es $l_0 = 310$ mm. Al colocar pesas con masas 50 g, 100 g, 150 g, 200 g y 250 g y medir los alargamientos correspondientes se obtiene la siguiente Tabla 1

Utilice la ley de Hooke (que establece que la fuerza que ejerce un resorte fabricado con un material homogéneo es directamente proporcional al alargamiento del mismo y opuesta a él, es decir: $F = -k(l - l_0)$, $k > 0$) para calcular por el método de los mínimos cuadrados la constante k recuperadora del muelle.

Ejercicio 21 En la fabricación de un cierto producto X , la cantidad de un cierto compuesto β presente es controlada por la cantidad del ingrediente α utilizada en el proceso. Al fabricar un kilo de X se registran la cantidad α usada y la cantidad β presente. Se obtienen los siguientes datos:

Cantidad α utilizada	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad β presente	4.5	5.5	5.7	6.6	7	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7

Suponiendo que la relación entre la cantidad α y la cantidad β está dada por una ecuación lineal: $\beta = a\alpha + b$, determine dicha recta utilizando el método de los mínimos cuadrados. Utilice la ecuación obtenida para predecir la cantidad β presentes en un kilo de X si se utilizan 30 unidades α por kilo de X .



Balanza de Jolly

$P = mg = -F$	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45
Δl	0.034	0.065	0.099	0.13	0.17

Figura 1: Tabla de Pesos/Alargamientos

Ejercicio 22 La tabla siguiente muestra la cantidad de un cierto contaminante y con respecto a la cantidad normal encontrada, medida en un punto geográfico para una cierta cantidad de aire y en intervalos de media hora:

t	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-0.15	0.24	0.68	1.04	1.21	1.15	0.86	0.41	-0.08

La gráfica de las medidas sugiere una relación de tipo polinómica de grado 2. Encuentre el polinomio de grado 2 ($y = at^2 + bt + c$) que produzca un buen modelo a partir de estos datos.

Ejercicio 23 Una organización obtiene los siguientes datos que relacionan el número de agentes de ventas con las ventas anuales:

Número de vendedores	5	6	7	8	9	10
Ventas anuales (en millones de euros)	2.3	3.2	4.1	5	6.1	7.2

Llamando x al número de agentes de ventas y llamando y a las ventas anuales en millones de euros:

- Determine la recta de mínimos cuadrados que relaciona x con y .
- Utilice la ecuación obtenida para estimar las ventas anuales si se dispone de 14 vendedores.