

Tema 3: Espacios euclídeos

Marisa Serrano,
Zulima Fernández

Universidad de Oviedo

25 de noviembre de 2009

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

- 1 Producto escalar: primeras definiciones
 - Definición
 - Representación matricial del producto escalar
 - Cambio de base
 - Diagonalización de un producto escalar
 - Subespacios ortogonales
- 2 Proyección ortogonal
 - Método de los mínimos cuadrados
 - Distintos ajustes por mínimos cuadrados

Definición

Definición 3.1

$V, \mathbb{R}$ -espacio vectorial, la aplicación $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\vec{v}, \vec{u}) \rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}$

a) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u} \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) \cdot \vec{u} &= \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{u} + \beta \vec{v}_2 \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) &= \alpha \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \beta \vec{u} \cdot \vec{v}_2\end{aligned}$$

b) Simetría $\forall \vec{v}, \vec{u} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$

c) Positiva $\forall \vec{v} \in V \quad \vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$

d) Definida $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Se llama producto escalar. $(V, \cdot)$ es un espacio euclídeo.

Ejemplo

Ejemplo 3.1

Probar que la aplicación siguiente es un producto escalar:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Cuadrado escalar

Definición 3.2

A la aplicación:

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

la llamaremos *cuadrado escalar*, y la denotaremos por $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

Ejemplo

Ejemplo 3.2

Calcular el cuadrado escalar asociado al producto:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Calcula $(1, 0)^2$

Recuperación del producto escalar a partir del cuadrado

Vamos a calcular el cuadrado escalar de una combinación lineal de dos vectores del espacio:

$$(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v})^2 = (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha^2 \vec{u}^2 + 2\alpha\beta \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta^2 \vec{v}^2$$

Tomando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$ se puede obtener el producto escalar de dos vectores a partir de sus cuadrados escalares:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} ((\vec{u} + \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2)$$

Longitud

Definición 3.3

Llamaremos longitud o norma de un vector al número real:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$$

Representación matricial

Se fija la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y los vectores $\vec{u}, \vec{w} \in V$, con coordenadas $\vec{u} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$,
 $\vec{w} = y_1 \vec{v}_1 + y_2 \vec{v}_2 + \dots + y_n \vec{v}_n \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = X^t G Y$ con

$$G = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_2^2 & \dots & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_n & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_n & \dots & \vec{v}_n^2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Propiedades de G

Por la simetría del producto escalar $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_i$, G debe ser simétrica. Además:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j, \text{ el elemento } i, j \text{ de}$$

la matriz G es el coeficiente del producto $x_i y_j$.

El cuadrado escalar sería

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^2 = \sum_{i=1}^n g_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n-1} 2g_{ij} x_i x_j$$

Ejemplos

Ejemplo 3.3

Dado el producto escalar:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, y_2, y_3) = \\ = x_1 y_1 + 6x_2 y_2 + 7x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 \end{aligned}$$

Calcula la matriz asociada.

Ejemplo 3.4

Dado el cuadrado escalar:

$$(x, y)^2 = 3x^2 - xy + 2y^2$$

Calcule la matriz asociada al producto escalar correspondiente.

Cambio de base en productos escalares

Sea $\cdot$ un producto escalar, cuya matriz asociada en la base $\mathcal{B}$ es A y en la base $\mathcal{B}'$ es M , siendo P la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

$$\begin{aligned} \vec{v} &\equiv X_{\mathcal{B}} \equiv X'_{\mathcal{B}'} \\ \vec{u} &\equiv Y_{\mathcal{B}} \equiv Y'_{\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

entonces: $B = P^t A P$.

Matrices congruentes

Definición 3.4

En el espacio $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ se define la relación binaria siguiente: A relacionada con M sí y sólo sí $\exists P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ regular, tal que $M = P^t A P$. De las matrices A y M se dice que son congruentes.

La relación de congruencia de matrices es una relación binaria de equivalencia.

Ejemplo

Ejemplo 3.5

Calcúlese la matriz del producto escalar:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

en la base canónica. Calcúlese la matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$

Cómo comprobar si una aplicación producto escalar

Una aplicación candidata a ser producto escalar debe tener una expresión en coordenadas respecto de una cierta base $\mathcal{B}$ de la forma:

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = X^t A Y$$

siendo A una matriz cuadrada y simétrica ¿otras condiciones?

Una condición sobre la matriz asociada

Teorema 3.1 (Criterio de Sylvester)

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A simétrica esté asociada a un producto escalar es que:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ejemplo

Ejemplo 3.6

Probar que la aplicación siguiente es un producto escalar:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

Bases ortonormales

A continuación nos plantearemos el cálculo de una base donde la matriz asociada al producto escalar sea lo más sencilla posible, es decir, siempre que sea posible diagonal, y mejor aún, la identidad. Veamos qué tipo de base sería, si queremos que la matriz asociada sea la identidad. Si

$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

es la base en la que la matriz asociada es la identidad, debe verificar que

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A este tipo de bases las llamaremos **bases ortonormales**.

Bases ortonormales

Definición 3.5

Los vectores que verifican que $\vec{v}^2 = 1$ se llaman vectores unitarios.

Definición 3.6

Dados dos vectores, $\vec{v}, \vec{u} \in V$ diremos que son vectores ortogonales si cumplen $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Por lo tanto encontrar una base ortonormal es encontrar una base de vectores ortogonales dos a dos y unitarios.

El método de Gauss

Sea $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j > i}}^{n-1} 2a_{ij}x_i x_j$ y queremos

saber si es un cuadrado escalar. El método de Gauss nos permite encontrar la matriz diagonal equivalente manipulando la expresión en coordenadas del cuadrado escalar:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \quad d_i > 0$$

Ejemplo 3.7

Se considera la aplicación siguiente:

$$\phi(x, y, z) = 2x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy - 4yz + 4xz$$

Probaremos que se trata de un cuadrado escalar, dando una base ortonormal.

Propiedades

Teorema 3.2

Todo sistema de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es un sistema libre

Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt

A partir de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, vamos a obtener una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ como sigue:

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \vec{e}_p = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{p-1} \vec{v}_{p-1} + \vec{v}_p$$

de forma que $\vec{v}_p \perp \vec{v}_i$ y $\alpha_i = \frac{\vec{e}_p \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Así, la base

$$\left\{ \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \dots, \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|} \right\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$$

es una base ortonormal de E .

Un ejemplo

Ejemplo 3.8

Utilícese el método anterior para calcular una base ortonormal para el producto escalar definido en la base canónica por la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades

Teorema 3.3 (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Dados dos vectores cualesquiera del espacio euclídeo V se cumple:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

Corolario

Si los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes entonces se verifica la igualdad.

Teorema 3.4 (Teorema de Pitágoras)

Si $\vec{v}$ e $\vec{w}$ son dos vectores ortogonales de E entonces

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Ángulo que forman dos vectores

Definición 3.7

Si los dos vectores son no nulos: $-1 \leq \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} \leq 1$ y existe un único número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

A $\theta \in \mathbb{R}$ le llamaremos ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Nota 3.1

Si multiplicamos la expresión del coseno por las longitudes de los vectores se obtiene la expresión habitual del producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

¿Sorprendente?, no, la métrica depende del producto escalar

Ejemplo 3.9

Con el producto escalar que en la base canónica tiene asociada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcúlese el coseno del ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

Ortogonalidad

Definición 3.8

Dos subespacios U y V de E se llaman ortogonales si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ para cada $\vec{v} \in U$ y para cada $\vec{w} \in V$. En este caso, se puede escribir $U \perp V$.

Definición 3.9

Si U es un subespacio de un espacio euclídeo E , el conjunto de los vectores ortogonales a U se denota por

$$U^\perp = \{\vec{w} \in E / \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \forall \vec{v} \in U\}$$

Propiedades 3.9.1

$U^\perp$ es subespacio de E y se le denomina suplemento ortogonal de U respecto de E .

El suplemento ortogonal

Propiedades 3.9.2

$$U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$$

Propiedades 3.9.3

Para que un vector $\vec{b} \in E$ sea ortogonal al subespacio U es suficiente que sea ortogonal a los vectores de una base cualquiera de U , $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Proyección ortogonal

Consideremos en el espacio euclídeo E de dimensión finita o no, $\mathcal{U}$ un subespacio vectorial de E de dimensión m y un vector $\vec{v} \in E$. Buscamos un vector $\vec{u} \in \mathcal{U}$ tal que $\vec{v} - \vec{u}$ sea ortogonal a $\mathcal{U}$, es decir, $\vec{v} - \vec{u} \in \mathcal{U}^\perp$. Al vector $\vec{u}$ se le denomina proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{U}$ y se le denota por $\vec{u} = \text{proy}_{\mathcal{U}}(\vec{v})$, o también $\vec{u} = \pi_{\mathcal{U}}(\vec{v})$.

Teorema 3.5

Si $\mathcal{U}$ es un subespacio m dimensional de un espacio euclídeo E y $\vec{p} \in \mathcal{U}$ es la proyección ortogonal de $\vec{v} \in E$ sobre $\mathcal{U}$, $\vec{v} \notin \mathcal{U}$.

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| > \|\vec{v} - \vec{p}\| \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{U} \quad \vec{w} \neq \vec{p}$$

Cálculo de la proyección

Supongamos que conocemos una base del subespacio $\mathcal{U}$:

$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$, buscamos $\vec{u} \in \mathcal{U}$ que debe ser de la forma

$$\vec{u} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_m \vec{e}_m$$

y que cumple

$$\vec{v} - (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_m \vec{e}_m) \in \mathcal{U}^\perp$$

Para calcular la proyección, descomponemos $\vec{v}$ en suma de un vector de $\mathcal{U}$ y otro de $\mathcal{U}^\perp$ y la proyección será el vector de $\mathcal{U}$ obtenido.

Curva que *mejor se ajuste* a un conjunto de datos

Dados los puntos: $(1, 2)$, $(2, 2)$ y $(3, 4)$, surgidos de mediciones tomadas durante un experimento.

Sospechamos que la relación entre los valores x e y es lineal del tipo $y = a + bx$.

Si nuestras medidas fuesen precisas, los tres puntos satisfarían la ecuación y tendríamos que:

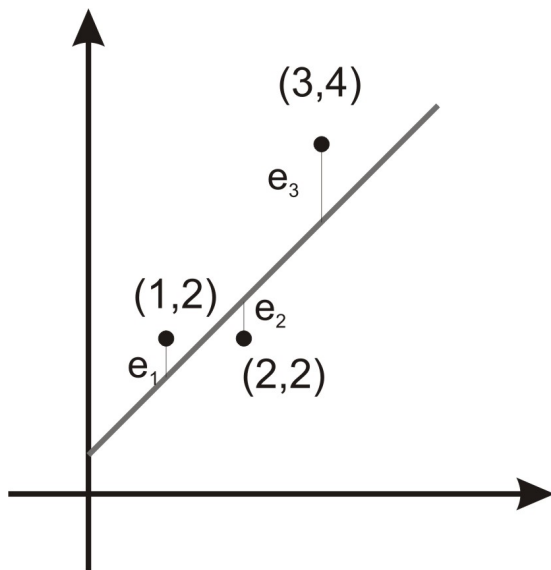
$$2 = a + b, \quad 2 = a + 2b, \quad 4 = a + 3b$$

obteniendo un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Desafortunadamente, el sistema es incompatible.

Error a minimizar



Los errores cometidos son e_1 , e_2 y e_3 , por ello formaremos el vector de error:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

y queremos que $\vec{e}$ sea lo menor posible, de manera que $\|\vec{e}\|$ sea mínimo.

Errores

El número $\|\vec{e}\|^2$ se le denomina **error de mínimos cuadrados** de la aproximación.

Este valor, como se ve fácilmente, depende del número de puntos, así que otro error habitual que es utilizado es el **error cuadrático medio**, que viene dado por $\epsilon = \frac{\|\vec{e}\|}{N}$, donde N es el número de medidas efectuadas.

Ejemplo de cálculo del error

Ejemplo 3.10

¿Cuál de las siguientes rectas nos da el menor error de mínimos cuadrados para los puntos de datos $(1, 2)$, $(2, 2)$ y $(3, 4)$?

a) $y = 1 + x$

b) $y = -2 + 2x$

c) $y = \frac{2}{3} + x$

(5)

Solución (4)

	$y = 1 + x$	$y = -2 + 2x$	$y = \frac{2}{3} + x$
e_1	$2 - (1 + 1) = 0$	$2 - (-2 + 2) = 2$	$2 - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}$
e_2	$2 - (1 + 2) = -1$	$2 - (-2 + 4) = 0$	$2 - \left(\frac{2}{3} + 2\right) = -\frac{2}{3}$
e_3	$4 - (1 + 3) = 0$	$4 - (-2 + 6) = 0$	$4 - \left(\frac{2}{3} + 3\right) = \frac{1}{3}$
$\ e\ ^2$	1	4	$\frac{2}{3}$
$\ e\ $	1	2	$\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$
$\ e\ /3$	0.3333	0.6667	0.2722

Representación gráfica

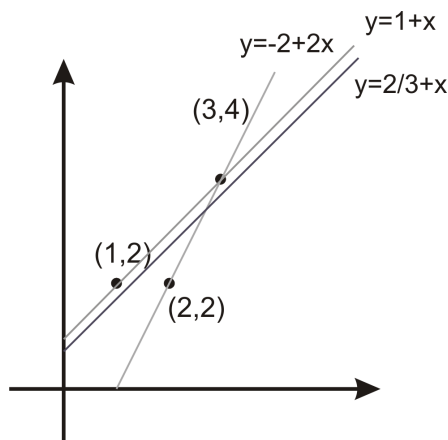


Figura: Las tres rectas aproximantes

Observamos que la recta que produce un error menor es $y = \frac{2}{3} + x$ la figura muestra los puntos de datos y las tres rectas. Observa que de las tres rectas, la elegida es la que no pasa por ninguno de los tres puntos, y sin embargo es con la que cometemos un error menor.

Una recta

Ejemplo 3.11

Supongamos que se quiere determinar la constante de un resorte cuya longitud inicial es de 13.5 cm. Para ello aplicamos al resorte unas fuerzas de 0.91, 1.81 y 2.72 kg consecutivamente, observando que su longitud se incrementa en 4.32, 10.41 y 17.78 cm, respectivamente. Calcula el error cometido.

Ley de Hooke: $F(x) = k(l - l_0) = kx$, donde:

- x es el alargamiento,
- k la constante a calcular
- $F(x)$ la fuerza necesaria para estirar el resorte hasta la longitud l

Solución

$$\left. \begin{aligned} 0.91 &= 0.0432k \\ 1.81 &= 0.1041k \\ 2.72 &= 0.1777k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Forma vectorial: $\vec{e}_1 k = \vec{v}$ con $\vec{v} = (0.91, 1.81, 2.72)$ y
 $\vec{e}_1 = (0.0432, 0.1041, 0.1777)$, el sistema no tiene solución.

k se halla resolviendo la ecuación

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 k = \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \rightarrow 11.5026k = 0.7111 \text{ y } k = 0.0618 \text{ kg/m}$$

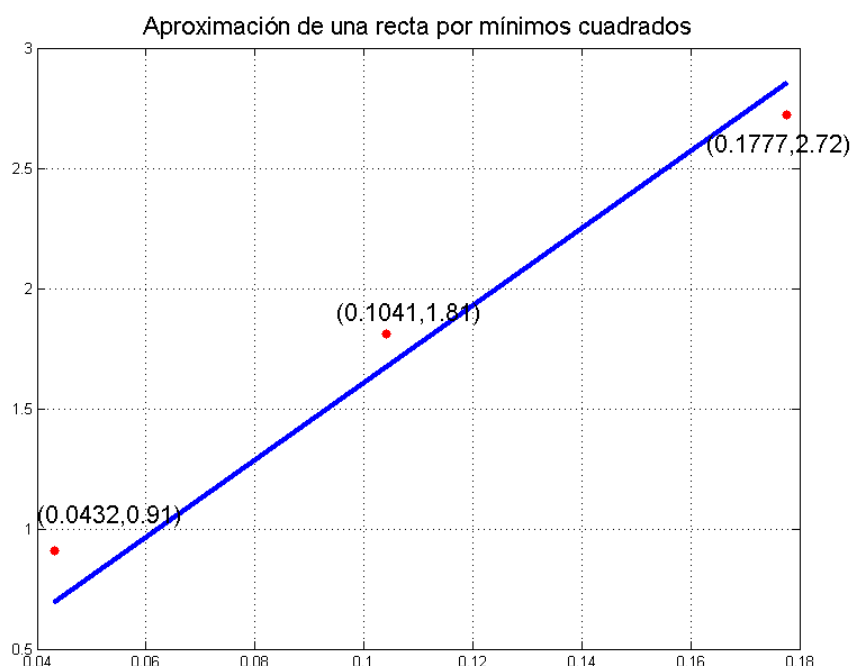
El error de mínimos cuadrados cometido viene dado por:

$$\|(0.91, 1.81, 2.72) - 0.0618(0.0432, 0.1041, 0.1778)\| = 0.2894$$

y el error cuadrático medio sería:

$$\frac{\|(0.91, 1.81, 2.72) - 0.0618(0.0432, 0.1041, 0.1778)\|}{3} = 0.0965$$

Gráfica



Un polinomio

Ejemplo 3.12

Se quiere determinar, la aceleración g debida a la gravedad en la superficie de la Tierra. Para ello, se suelta un peso con altura y velocidad inicial desconocidas, y en ciertos instantes t , se mide la distancia recorrida en el descenso s , referida a un punto fijo. Las observaciones obtenidas son $s = -0.0549, 0.0945, 0.3139, 0.7559$ y 1.1369 metros para $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5 segundos, respectivamente.

La segunda ley de Newton: un cuerpo cercano a la superficie de la Tierra cae verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$ con $s_0 =$ posición inicial, $s =$ desplazamiento vertical hacia abajo, respecto a s_0 , $v_0 =$ velocidad inicial, $g =$ la aceleración debida a la gravedad.

Solución

$$\left. \begin{aligned} -0.0549 &= c_1 + 0.1c_2 + 0.01c_3 \\ 0.0945 &= c_1 + 0.2c_2 + 0.04c_3 \\ 0.3139 &= c_1 + 0.3c_2 + 0.09c_3 \\ 0.7559 &= c_1 + 0.4c_2 + 0.16c_3 \\ 1.1369 &= c_1 + 0.5c_2 + 0.25c_3 \end{aligned} \right\}$$

El sistema no tiene solución, y que se puede expresar vectorialmente como

$$\vec{e}_1 c_1 + \vec{e}_2 c_2 + \vec{e}_3 c_3 = \vec{v}$$

resolveremos

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 c_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 c_2 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 c_3 &= \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 c_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 c_2 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 c_3 &= \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 c_1 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 c_2 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 c_3 &= \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \end{aligned} \right\}$$

Solución (II)

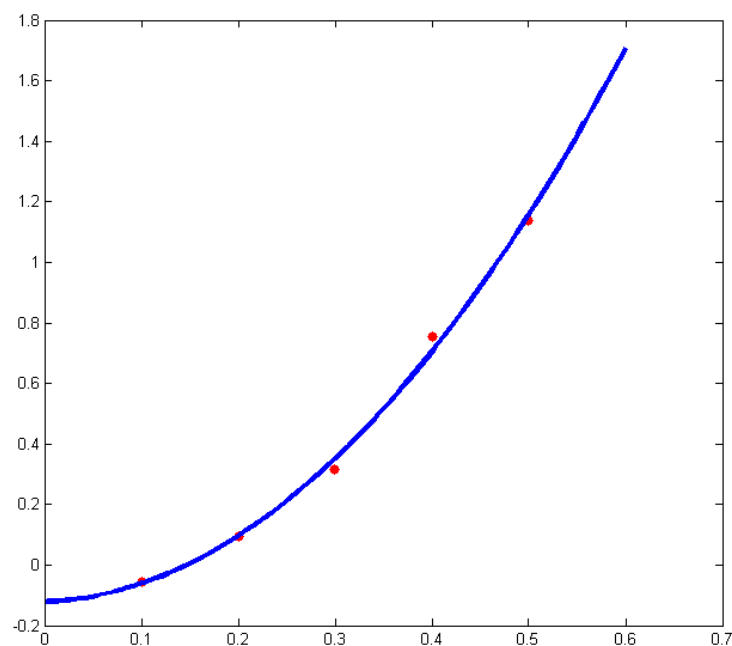
$$\left. \begin{aligned} 5c_1 + 1.5c_2 + 0.55c_3 &= 2.2463 \\ 1.5c_1 + 0.55c_2 + 0.225c_3 &= 0.9784 \\ 0.55c_1 + 0.225c_2 + 0.0979c_3 &= 0.4367 \end{aligned} \right\}$$

de donde

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.1192 = s_0 \\ c_2 &= 0.0875 = v_0 \\ c_3 &= 4.9293 = \frac{1}{2}g \rightarrow g = 9.8586 m/s^2 \end{aligned}$$

y el error cometido sería: $e = 0.0666$ y el error cuadrático medio sería: $\epsilon = \frac{e}{N} = \frac{0.0666}{4} = 0.0133$

Gráfica



Aproximación de funciones por polinomios

Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Frecuentemente se necesita calcular un polinomio de grado n , $P_n(x)$ que se ajuste lo más posible a la función en el sentido de los mínimos cuadrados, es decir, tal que

$$\|f - P_n(x)\|^2 \text{ sea mínima}$$

Al valor $\vec{e} = \|f - P_n(x)\|^2$ le llamaremos el error cometido con la aproximación. Considerando el producto escalar $\int_a^b f(x)g(x)dx$ del espacio de las funciones continuas en $[a, b]$, la condición es equivalente a

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$

Ejemplo

Ejemplo 3.13

Aproxime por el método de mínimos cuadrados la función $f(x) = \sin(\pi x)$ en $[0, 1]$ mediante un polinomio de segundo grado, y calcule el error cometido con la aproximación.

Sea $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ el polinomio buscado, los coeficientes a_0, a_1, a_2 son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx &= \int_0^1 x \sin \pi x dx \\ a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx &= \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx \end{aligned} \right\}$$

Solución

$$\left. \begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 &= \frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3} \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \simeq -0.0505, \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \simeq 4.1225$$

En consecuencia, el polinomio que aproxima la función es

$$P_2(x) = -0.0505 + 4.1225x - 4.1225x^2$$

El error cometido es:

$$\int_0^1 [\sin(\pi x) - (-0.0505 + 4.1225x - 4.1225x^2)]^2 dx = 0.00029803$$

Gráfica

