

Tema 2: Espacios vectoriales y aplicaciones lineales

Marisa Serrano;
Zulima Fernández

Universidad de Oviedo

7 de octubre de 2009

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios vectoriales
 - Generalidades
 - Subespacios vectoriales
 - Combinaciones lineales, sistemas generadores y bases
 - Suma e intersección
 - El espacio vectorial de las matrices
- 3 Determinantes
- 4 Aplicaciones lineales
 - Generalidades
 - Matriz asociada a una aplicación lineal
 - Cambio de bases en una aplicación lineal
 - Matriz de la composición de aplicaciones lineales
 - Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Ley de composición interna

Definición 2.1

Sea $A \neq \emptyset$ llamaremos *operación interna en A*, *ley de composición interna en A* o, de forma abreviada, *lci*, a cualquier aplicación del producto cartesiano $A \times A$ en A :

$$\begin{aligned} *: \quad A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longrightarrow a * b = c \in A \end{aligned}$$

Conjuntos y leyes

Ejemplo 2.1

¿Cuáles de las siguientes operaciones son lci?

- a) Suma de números naturales
- b) Resta de números naturales
- c) Producto de números racionales
- d) Producto de números irracionales
- e) Producto de números reales
- f) División de números reales

Ley de composición externa

Definición 2.2

Sean A y $\mathbb{K}$ dos conjuntos, llamaremos *operación externa* o *ley de composición externa* en A (de forma abreviada *lce*) con dominio de operadores en $\mathbb{K}$ a cualquier aplicación del producto cartesiano $\mathbb{K} \times A$ en A :

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times A &\longrightarrow A \\ (\alpha, b) &\longrightarrow \alpha \cdot b = c \in A \end{aligned}$$

Conjuntos y leyes

Ejemplo 2.2

¿Cuáles de las siguientes operaciones son lce?

- a) Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^2$
- b) Producto de un número racional por un elemento de $\mathbb{R}^3$
- c) Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{Q}^2$
- d) Producto de un número natural por números reales

Grupo

Definición 2.3

Un grupo es una estructura algebraica formada por un conjunto G y una l.c.i. $*$, $(G, *)$ tal que se cumple:

- a) Asociativa: $a * (b * c) = (a * b) * c, \forall a, b, c \in G$
- b) Elemento neutro: $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a, \forall a \in G$
- c) Elemento simétrico: $\forall a \in G \exists a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$

Si $*$ es **conmutativa**, ($\forall a, b \in G$ se verifica que $a * b = b * a$), entonces diremos que se trata de un grupo conmutativo o abeliano.

Algunos grupos

Ejemplo 2.3

¿Cuáles de los siguientes pares son grupos?

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $(\mathbb{N}, +)$ | f) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ |
| b) $(\mathbb{N}, \cdot)$ | g) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ |
| c) $(\mathbb{Z}, +)$ | h) $(\mathbb{R}, +)$ |
| d) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ | i) $(\mathbb{R}, \cdot)$ |
| e) $(\mathbb{Q}, +)$ | j) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ |

Cuerpo

Definición 2.4

Una estructura algebraica formada por un conjunto y dos lci $(\mathbb{K}, +, \circ)$ diremos que es un cuerpo cuando $(\mathbb{K}, +)$ es grupo abeliano cuyo neutro llamaremos 0 y $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \circ)$ es un grupo, a cuyo neutro llamaremos 1 y las leyes cumplen la propiedad distributiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}, \quad (a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c$$

Cuando la segunda ley es conmutativa diremos que se trata de un cuerpo conmutativo o abeliano.

Algunos cuerpos

Ejemplo 2.4

¿Cuáles de las siguientes ternas son cuerpos?

a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

d) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

e) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

f) $(\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Espacios vectoriales

Definición 2.5

Un espacio vectorial es un conjunto $V \neq \emptyset$ con una lci $+$ y una lce $\cdot$ con dominio en un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ que verifican:

a) $(V, +)$ es grupo abeliano

b) distributiva para la suma de vectores:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

c) distributiva para la suma de escalares:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall \vec{u} \in V \quad (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

d) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall \vec{u} \in V \quad \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

e) $\forall \vec{u} \in V \quad 1\vec{u} = \vec{u}$

Propiedades

Propiedades 2.5.1

Para cada $\vec{v} \in V$ y para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

a) $0\vec{v} = \vec{0}$

b) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$

c) $\alpha\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ o bien $\alpha = 0$

d) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Subespacios vectoriales

Definición 2.6

Si V es un espacio vectorial y H es un subconjunto de V , diremos que H es un **subespacio vectorial** de V si, con las leyes suma y producto por un escalar definidas en V y restringidas a H se tiene que es un espacio vectorial.

Se denotará por:

$$H \leq V$$

Caracterización

Sea V un espacio vectorial, y $H \subseteq V$ con $H \neq \emptyset$ entonces H es subespacio vectorial de V si y sólo si se cumplen las dos propiedades siguientes:

- a) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in H \quad \vec{u} + \vec{v} \in H$
- b) $\forall \vec{u} \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \alpha \vec{u} \in H$

Aplicaciones

Ejemplo 2.5

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$?

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x + y = 1\}$
- b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x + 2y = 0\}$
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x^2 + y = 0\}$
- d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R} / x - 3y = 0 \text{ con } x \geq 0\}$

Sistemas de vectores

Definición 2.7

Sea V un espacio vectorial, y sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ vectores de V , al conjunto ordenado

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

le llamaremos sistema de vectores de V . Obsérvese que, al ser un conjunto ordenado, cada vector está en una posición, y si reordenamos el sistema cambia. Además se pueden repetir vectores.

Combinaciones lineales

Definición 2.8

Dado el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

llamaremos combinación lineal de $\mathcal{S}$ a cualquier vector de la forma

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Subespacio generado por un sistema de vectores

Definición 2.9

Dado el sistema de vectores

$$\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

llamaremos generado por $\mathcal{S}$ al conjunto

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$$

$$\langle \mathcal{S} \rangle \leq V$$

y diremos que $\mathcal{S}$ genera $\langle \mathcal{S} \rangle$ o también que es generador de $\langle \mathcal{S} \rangle$

Sistemas ligados y libres

Definición 2.10

Un sistema de vectores $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ diremos que es ligado, o también que los vectores de S son linealmente dependientes, si uno de ellos es combinación de los demás, equivalentemente, si $\vec{0}$ es combinación lineal de S con no todos los escalares que intervienen nulos.

Definición 2.11

Si el sistema no es ligado diremos que es libre y que sus vectores son linealmente independientes. Esto es equivalente a que la única combinación lineal nula de S es aquella en la que todos los escalares son 0.

Sistemas libres

Ejemplo 2.6

¿Cuáles de los siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$ son libres?

- a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$
- b) $\{(1, 0, 2), (1, 1, 2)\}$
- c) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 0)\}$
- d) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Bases

Definición 2.12

Si H es un subespacio vectorial de V , diremos que un sistema de vectores de H es una base si es sistema generador de H y es libre.

Bases de subespacios

Ejemplo 2.7

Dado el conjunto

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$$

demuestra que el sistema de vectores

$$\mathcal{B} = \{(2, 0, -1), (1, 1, -1)\}$$

es una base de H .

Coordenadas

Teorema 2.1 (de la representación única)

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base del espacio V , entonces, para cada $\vec{u} \in V$ existe un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{u}$$

α_i es la coordenada i -ésima del vector $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}$, y a los vectores $\alpha_i \vec{v}_i$ componente i -ésima.

Sistemas equivalentes

Definición 2.13

Diremos que dos sistemas, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, del espacio vectorial V son equivalentes cuando el generado por ambos coincide, es decir, cuando $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{S}' \rangle$

Operaciones elementales

Propiedades 2.13.2

Dado $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores, los siguientes sistemas son equivalentes a S :

- a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n\}$
- b) $\{\alpha \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ con $\alpha \neq 0$
- c) $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$
- d) $\{\vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

Teorema

Teorema 2.2 (Fundamental de la independencia)

Si $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es un sistema generador de V y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$ es un sistema libre de V , entonces $p \leq n$

Espacios de dimensión finita

Definición 2.14

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Si existe $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V diremos que V es un espacio de dimensión finita y llamaremos dimensión de V al número natural $n = \dim V$. Si V no posee base finita diremos que es de dimensión infinita, y si $V = \{\vec{0}\}$ diremos que $\dim V = 0$

Dimensión de subespacios

Teorema 2.3

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión n , si $U \leq V$ entonces U también es un espacio vectorial de dimensión finita y además $\dim U \leq \dim V = n$

Teorema 2.4

Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.

¿Cómo observar si un sistema de vectores es libre?

Fijemos una base y expresemos los vectores en coordenadas, como sigue:

$$u_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$u_m = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

Si la matriz escalonada asociada a

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

no contiene filas nulas, el sistema es libre.

Sistemas libres y ligados

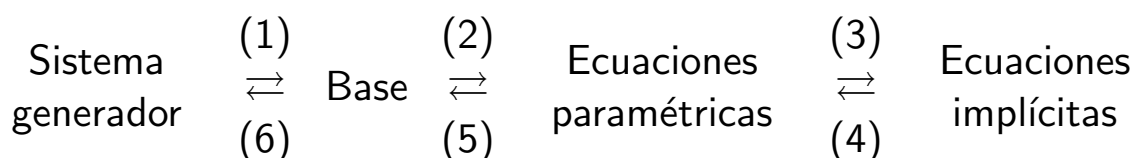
Ejemplo 2.8

Decide si los sistemas siguientes de $\mathbb{R}^3$ son libres o ligados:

$$\mathcal{S}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 1)\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$$

Descripción de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$



Método práctico

Ejemplo 2.9

Realizar todos los pasos anteriores para pasar de una descripción a otra del subespacio de $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{U} = \langle (1, 1, 1, 1, 1), (2, -1, 2, -3, 1), (3, 0, 3, -3, 1), (1, 1, 1, 0, 0) \rangle$$

Bases

Teorema 2.5 (de la base incompleta)

Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es un sistema libre del espacio vectorial V de dimensión n , existen $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}$ vectores de V tales que el siguiente sistema de vectores es una base:

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-p}\}$$

Ejemplo del TBI

Ejemplo 2.10

Si $V = \mathbb{R}^5$ el sistema

$S = \{(1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 3, 2, 1), (1, -2, 1, 1, -1)\}$ ¿es libre?. En caso de serlo, completar a una base de $\mathbb{R}^5$.

Base en subespacios de dimensión finita

Teorema 2.6

Sea V un espacio de $\dim V = n$, y sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ un sistema de vectores de V , entonces:

- a) Si S es libre entonces es base de V
- b) Si S es sistema generador de V , entonces es base.

Rango de subespacios vectoriales

Definición 2.15

Se llama *rango* de un sistema de vectores a la dimensión del subespacio generado por dicho sistema.

Ejemplo 2.11

Calcúlese el rango del sistema de vectores $S = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 5, 2)\}$ y describase $\langle S \rangle$ dando sus ecuaciones paramétricas, implícitas y una base.

Suma e intersección de subespacios

Definición 2.16

Dados V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, llamaremos **subespacio intersección** al conjunto

$$U_1 \cap U_2 = \{ \vec{v} \in V \mid \vec{v} \in U_1 \text{ y } \vec{v} \in U_2 \}$$

Llamaremos **subespacio suma** al conjunto

$$U_1 + U_2 = \{ \vec{v} \in V \mid \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \text{ tal que } \vec{v}_1 \in U_1 \text{ y } \vec{v}_2 \in U_2 \}$$

Propiedades 2.16.3

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, entonces $U_1 \cap U_2$ y $U_1 + U_2$ son subespacios vectoriales de V . Además:

$$U_1 \cap U_2 \leq U_1 + U_2 \leq V$$

Unión de subespacios

La unión de subespacios no siempre es subespacio, por ejemplo, dados los subespacios

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\}, \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y\}$$

los vectores $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$ están en la unión y sin embargo $(1, 0, 1) + (1, 1, 0) = (2, 1, 1)$ no está en la unión.

Cálculo de la suma de subespacios

Propiedades 2.16.4

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, S_1 un sistema generador de U_1 y S_2 un sistema generador de U_2 , entonces $S_1 \cup S_2$ es un sistema generador de $U_1 + U_2$.

Ejemplo 2.12

En $\mathbb{R}^4$, calcular una base de la suma del subespacio $U_1 = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1) \rangle$ y el subespacio $U_2 = \langle (1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle$

Teorema de las dimensiones

Teorema 2.7

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, entonces:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

Ejemplo 2.13

Calcúlense una base de la suma y una base de la intersección de los subespacios siguientes:

$$U_1 = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1) \rangle$$

$$U_2 = \langle (2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 7) \rangle$$

Suma directa

Definición 2.17

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, diremos que la suma es directa y lo denotaremos por $U_1 \oplus U_2$, cuando cada vector de la suma se descomponga de forma única en suma de un vector de U_1 y otro de U_2 .

Caracterizaciones

Propiedades 2.17.5

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, $U_1, U_2 \leq V$. Son equivalentes:

- a) La suma de U_1 y U_2 es directa.
- b) La unión de una base de U_1 y una base de U_2 es un sistema libre de $U_1 + U_2$.
- c) $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$
- d) Si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{0}$ con $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$ entonces $\vec{u}_1 = \vec{0}$ y $\vec{u}_2 = \vec{0}$.
- e) $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

Ejemplo de suma directa

Ejemplo 2.14

Demuéstrase que: $\langle (1, 1, 1), (1, 0, 2) \rangle$ y $\langle (1, 0, 0), (2, 1, 3) \rangle$ no son suma directa y que $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1) \rangle$ y $\langle (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle$ sí lo son.

Subespacios suplementarios

Definición 2.18

Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita, y sean U_1 y U_2 dos subespacios vectoriales suyos, diremos que U_1 y U_2 son *suplementarios en V* si

$$V = U_1 \oplus U_2$$

Caracterización

Propiedades 2.18.6

Si V es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita, y U_1 y U_2 son dos subespacios vectoriales suyos, U_1 y U_2 son *suplementarios en V* si y sólo si

- a) $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$
- b) $U_1 + U_2 = V$

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Con la suma y el producto por un escalar, el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial.

Una base del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ es:

$$\{E_{ij} = (e_{kl}) \mid e_{ij} = 1 \text{ y } e_{kl} = 0 \text{ con } (k, l) \neq (i, j)\}$$

$$\dim(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})) = mn$$

Rango de una matriz

Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, llamaremos sistema de los vectores filas de A :

$$S_f = \{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})\}$$

y sistema de los vectores columna de A :

$$S_c = \{(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})\}$$

$$rgS_f = rgS_c = rg(A)$$

Cálculo del rango de una matriz

Ejemplo 2.15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$$

Calcular $rg(A)$

Matrices regulares

Diremos que una matriz es regular si S_f y S_c son sistemas libres.
Como $rgS_f = rgS_c$ la matriz debe ser cuadrada.

Ejemplo 2.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$$

El sistema de las filas de A está en $\mathbb{R}^5$ y es

$$S_f = \{(1, 2, -1, 3, -1), (0, 1, 1, 2, 0), (1, 1, -2, 1, -1), (0, 0, 1, 1, 1)\}$$

Su rango es 3

Matrices regulares

Diremos que una matriz es regular si S_f y S_c son sistemas libres.
Como $rgS_f = rgS_c$ la matriz debe ser cuadrada.

A regular $\leftrightarrow$ es inversible.

Ejemplo 2.17

Calcular las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambio de base en espacios vectoriales

Sea V $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ dos bases de V . Buscamos una relación entre las coordenadas de un vector respecto de la base $\mathcal{B}$ y sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$. Si se suponen conocidas las coordenadas de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$,

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 &= a_{11}\vec{u}_1 + a_{21}\vec{u}_2 + \cdots a_{n1}\vec{u}_n \\ \vec{e}_2 &= a_{12}\vec{u}_1 + a_{22}\vec{u}_2 + \cdots a_{n2}\vec{u}_n \\ &\vdots \\ \vec{e}_n &= a_{1n}\vec{u}_1 + a_{2n}\vec{u}_2 + \cdots a_{nn}\vec{u}_n \end{aligned} \right\}$$

Se considera el vector genérico es

$$\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots x_n\vec{u}_n = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots y_n\vec{e}_n.$$

Relación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

la llamaremos **matriz del cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$** .

Cálculo de la matriz de cambio de base

La matriz de un cambio de base es única y regular. Además P^{-1} representa el cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$

Ejemplo 2.18

Calcular la matriz de cambio de base de la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ a la base $\{(1, -1, 0), (0, 2, 1), (0, 0, 1)\}$

Definición

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

Llamaremos determinante de A al escalar

$$\det(A) = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \\ \text{permutacion de} \\ (1, 2, \dots, n)}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} (-1)^{[(i_1, i_2, \dots, i_n)]}$$

Ejemplos

Ejemplo 2.19

Contaremos el número de inversiones de la permutación $(3, 9, 5, 2, 1, 7, 8, 6, 4)$

Ejemplo 2.20

Fórmula de determinantes de orden 2 y 3

Ejemplo 2.21

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular, entonces

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Propiedades

- ① $\det(A) = \det(A^t)$
- ② Si A tiene una fila combinación lineal del resto de las filas
 $\rightarrow \det(A) = 0$
- ③ Si intercambio dos filas de A el determinante cambia de signo.
- ④ El determinante no varía si a una fila le sumo una combinación lineal de las otras.
- ⑤ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- ⑥ $\exists A^{-1} \leftrightarrow \det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$

Menor de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamaremos menor i j de A al escalar:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Adjunto de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, llamaremos adjunto i j de A al escalar:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

y llamaremos matriz adjunta de A a

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema

El determinante de una matriz cuadrada A se puede obtener desarrollando por los elementos de una fila (columna):

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \dots + a_{ni}A_{ni} = \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \end{aligned}$$

Aplicaciones

Sea A una matriz cuadrada:

- 1 Si A es regular:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A^+)^t$$

- 2 El rango de A es el orden de la mayor submatriz de A regular.
- 3 Regla de Cramer

Ejemplos

Ejemplo 2.22 (Recta que pasa por dos puntos)

Calcula la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) .

Ejemplo 2.23

Deduzca la ecuación de la recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por $(1, 2)$, $(-2, 0)$.

El determinante de Vandermonde

Ejemplo 2.24

$$\mathcal{V}_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{V}_n(a_1, \dots, a_n)) &= (a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \cdots (a_n - a_1) \\ &\quad (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdots (a_{n-1} - a_1) \cdots \\ &\quad \cdots (a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

Aplicaciones del determinante de Vandermonde

Ejemplo 2.25

Calcula

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 27 \\ 1 & 5 & 125 \end{pmatrix}$$

Cuestiones

Ejemplo 2.26

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, explica qué propiedades hacen que las siguientes afirmaciones sean ciertas:

- ① $\det(A^5) = (\det(A))^5$
- ② $\det(A) - \det(A^t) = 0$
- ③ $\det(AB) - \det(B^t) \det(A) = 0$
- ④ $\det(5A) = 125 \det(A)$
- ⑤ Si $\exists B^{-1}$ entonces $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$
- ⑥ $\det(A^t A) = \det(A^2)$

Definición

Definición 2.19

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f: U \rightarrow V$ diremos que es una aplicación lineal si verifica:

- A1 $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ se cumple $T(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2)$.
A2 $\forall \vec{u} \in U$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ se cumple $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

Los axiomas A1 y A2 de la definición anterior son equivalentes a

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \quad T(\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2) = \alpha_1 T(\vec{u}_1) + \alpha_2 T(\vec{u}_2)$$

Ejemplos

Ejemplo 2.27

Comprobar que $f(x, y, z) = (2x, x + y)$ es aplicación lineal

Ejemplo 2.28

Comprobar que $f(x, y) = (x + y^2, y)$ no es aplicación lineal

Propiedades

Propiedades 2.19.7

Sea $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal, y $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un sistema de vectores de U , llamaremos sistema imagen al sistema $f(S) = \{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)\}$, entonces:

- ① Si S es ligado, $f(S)$ es ligado.
- ② Si $f(S)$ es libre, entonces S es libre.
- ③ S puede ser libre y $f(S)$ ser ligado.

La imagen por una aplicación lineal del vector nulo es el vector nulo:

$$f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$$

Representación matricial de una aplicación lineal

Sean $f: U \rightarrow V$ aplicación lineal, $B_U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ base de U y $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ base de V .

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{u}_1) &= a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m \\ f(\vec{u}_2) &= a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{u}_n) &= a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_m \end{aligned} \right\}$$

$\vec{w} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n \in V$, $f(\vec{w}) = y_1\vec{v}_1 + \dots + y_m\vec{v}_m$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz de la aplicación en distintas bases

Sea $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Se conoce la matriz de la aplicación lineal en dos bases B_U y B_V ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Conocemos P que hace el cambio de base, es decir, aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B'_U en función de los vectores de B_U y la matriz Q de cambio de base en V , a la nueva base B'_V .

Cuando cambiamos las dos bases, la matriz de la aplicación lineal en las bases B'_U y B'_V sería $M = Q^{-1}AP$.

Un ejemplo de cambio

Ejemplo 2.29

Dada la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \rightarrow & (2x + y + z, x + y + z + t, y - z + 2t) \end{array}$$

Calcúlese la matriz de la aplicación lineal en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y de $\mathbb{R}^3$, así como la matriz en las bases

$B = \{(1, 1, -1, 2), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 1, -2), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y

$B' = \{(1, -2, -1), (2, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Composición de aplicaciones lineales

Supongamos que tenemos definidas dos aplicaciones lineales

$$f: V \rightarrow W \qquad g: U \rightarrow V$$

Se define la composición como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\ & & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & \\ & & h = f \circ g & & \end{array}$$

donde $h(\vec{v}) = f \circ g(\vec{v}) = f(g(\vec{v}))$

Matriz de la composición de aplicaciones lineales

Tomando bases fijadas en los tres espacios: B_U , B_V y B_W , y suponiendo que la matriz asociada a f es A y la matriz asociada a g es B , entonces la matriz asociada a $f \circ g$ es AB .

Ejemplo 2.30

Demuestra que si tomas otra base de V , B'_V la matriz de la composición sigue siendo AB .

El núcleo de una aplicación lineal

Sean U y V dos $\mathbb{K}$ –espacios vectoriales y $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal entre ambos, se define el núcleo de la aplicación lineal como el conjunto

$$\ker f = \left\{ \vec{u} \in U / f(\vec{u}) = \vec{0} \right\} \leq U$$

La imagen de una aplicación lineal

Sean U y V dos $\mathbb{K}$ –espacios vectoriales y $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal entre ambos, se define la imagen de la aplicación lineal como el conjunto

$$Imf = \{\vec{v} \in V / \exists \vec{u} \in U \quad f(\vec{u}) = \vec{v}\} \leq V$$

Llamaremos rango de una aplicación lineal a

$$rgf = \dim Imf \leq \dim V$$

Sea $W \leq U$, llamaremos conjunto imagen de W a

$$f(W) = \{f(\vec{w}) \in V / \vec{w} \in W\}$$

Determinación del núcleo y la imagen de una aplicación lineal

Ejemplo 2.31

Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}_3[x]$ siguiente:

$$f(a, b, c, d) = (-5a + 10b - 5c + 4d) + (8a + 3b - 4c + 7d)x + (+4a - 9b + 5c - 3d)x^2 + (-3a - 2b + 5c + 4d)x^3$$

Calcúlese una base del núcleo y una base de la imagen.

Tipos de aplicaciones

Dada una aplicación $f: A \rightarrow B$ diremos que es inyectiva cuando dos elementos distintos de A no tienen nunca la misma imagen en B , es decir

$$\text{si } x, y \in A \text{ con } f(x) = f(y) \rightarrow x = y$$

o también

$$\text{si } x, y \in A \text{ con } x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

y diremos que es suprayectiva si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A , es decir, si

$$\forall x \in B \exists y \in A / f(y) = x$$

Caracterizaciones

Dados U y V $\mathbb{K}$ –espacios vectoriales, y dada $f: U \rightarrow V$ aplicación lineal, se verifica:

$$f \text{ inyectiva} \leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}\}$$

Dados U y V $\mathbb{K}$ –espacios vectoriales, y dada $f: U \rightarrow V$ aplicación lineal, se verifica:

$$f \text{ suprayectiva} \leftrightarrow \text{Im} f = V$$

Bijecciones

Dados U y V $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales, y dada $f: U \rightarrow V$ aplicación lineal, se verifica, que la aplicación es suprayectiva si $rgA = rgf = \text{número de columnas de } A$ y es inyectiva si $rgA = rgf = \text{número de columnas de } A$. Así una aplicación biyectiva verifica que su matriz asociada es cuadrada y regular, y por lo tanto, para que una aplicación lineal sea biyectiva los espacios inicial y final deben tener la misma dimensión. La inversa de una aplicación lineal biyectiva tiene asociada la matriz inversa, A^{-1} , de la matriz de la aplicación lineal original.

Cambios de base como aplicaciones lineales

El cambio de base en un espacio vectorial se puede considerar como una aplicación lineal del espacio U es sí mismo, considerando en U como espacio inicial la base nueva, B' , y en U como espacio final la base antigua, B , esta aplicación lineal es biyectiva, ya que la matriz asociada es regular.

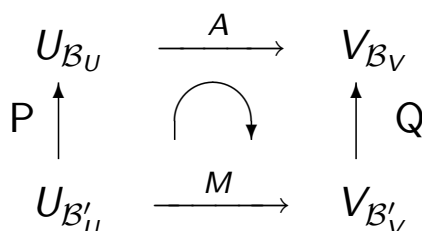
$$\begin{array}{ccc} U_{B'_U} & \xrightarrow{P} & U_{B_U} \\ Y & \longrightarrow & X = PY \end{array}$$

La aplicación inversa de esta aplicación sería el cambio de base inverso:

$$\begin{array}{ccc} U_{B_U} & \xrightarrow{P^{-1}} & U_{B'_U} \\ X & \longrightarrow & Y = P^{-1}X \end{array}$$

Cambios de base en aplicaciones lineales como composiciones

Realizar en una aplicación lineal cambios de base en el espacio inicial y final es equivalente, por tanto a hacer una composición de aplicaciones lineales como sigue:



Aplicando lo visto con respecto a la composición de aplicaciones, y teniendo en cuenta que P y Q son regulares, se tiene que $M = Q^{-1}AP$

Ejemplo 2.32

Se considera la aplicación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(1+x) = (1, 0, 0)$, $T(x+x^2) = (1, 1, 0)$ y $T(-1-x+x^2) = (0, 0, 0)$. Halla la matriz de T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $B_2 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}$.

Teorema del rango en aplicaciones lineales

Sea $f: U \rightarrow V$ una aplicación lineal, entonces:

$$\dim(U) = \dim \ker(f) + \text{rg}(f)$$

Ejemplo 2.33

Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida como sigue:

$$f(1, 1, 1, 1) = 1 + 2x + x^3 = f(0, 1, 1, 1), \quad f(0, 0, 1, 1) = -1 + 3x + 2x^2 + 3x^3, \quad f(0, 0, 0, 1) = 0$$

Se pide:

- Matriz de la aplicación f en las bases canónicas.
- Base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas del $\ker(f)$.
- Base, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$.
- $T^{-1} \langle x^3, x^2 + 2x^3 \rangle$
- $T^{-1} \{x^3, x^2 + 2x^3\}$