

Tema 1: Sistemas de ecuaciones lineales

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

5 de octubre de 2009

email: mlserrano@uniovi.es

Índice

- 1 Introducción
- 2 Sistemas lineales: método de Gauss
- 3 Sistemas homogéneos.

Resolución geométrica

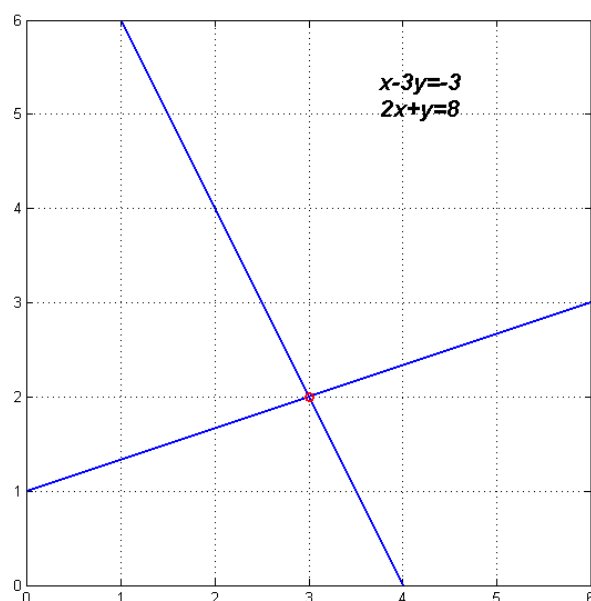
Ejemplo 1.1

En $\mathbb{R}^2$, vamos a calcular el punto intersección de las rectas de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 8 \\ x - 3y & = & -3 \end{array} \right\}$$

(1.5)

Resolución gráfica



$$2x + y = 8 \quad x - 3y = -3$$

x	y	x	y
0	8	-3	0
1	6	0	1
2	4	3	2

Distintas soluciones

Los métodos habituales de resolución de sistemas que se han utilizado hasta ahora son los siguientes:

- Eliminación (ejemplo 1.1)
- Método de sustitución
- Método de Cramer

¿Qué método es mejor?

El método más eficaz es el método de eliminación de Gauss, consistente en realizar operaciones con las ecuaciones que transforme el sistema en otro con las mismas soluciones que el original, pero más sencillo. Estas operaciones son:

- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo.
- Reordenar las ecuaciones.
- Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.

Ejemplo utilizando eliminación de Gauss

Ejemplo 1.2

Resuelva por el método de eliminación de Gauss el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x + y + z & = & 3 \\ x + 3y + z & = & 1 \\ x + y + 3z & = & 1 \end{array} \right\}$$

El método de Gauss.

Llamaremos sistema de m ecuaciones lineal con n incógnitas, a todo conjunto de relaciones del tipo siguiente:

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{Ec. } 1^a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{Ec. } 2^a & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Ec. } m^a & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

a_{ij} son coeficientes del sistema b_i son términos independientes, todos son elementos de un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ (habitualmente trabajaremos en $\mathbb{R}$). x_j son las incógnitas del sistema.

Solución

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ es solución de 1 si

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array} \right\}$$

Clasificación de los sistemas

Definición 1.1

Sea S el conjunto de todas las soluciones del sistema 1. Diremos que hemos resuelto el sistema cuando conozcamos todos y cada uno de los elementos de S .

Diremos que el sistema es compatible siempre que $S \neq \emptyset$. Diremos que es incompatible si $S = \emptyset$. Un sistema compatible se dice determinado cuando $\text{card}(S) = 1$, y se dice indeterminado si $\text{card}(S) > 1$.

Matrices asociadas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{coeficientes}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \text{ampliada}$$

Matriz escalonada

Definición 1.2

Diremos que una matriz es escalonada si verifica que cada una de las filas de la matriz comienza con una sucesión de ceros que tiene al menos un cero más que la fila anterior. (Si alguna de las filas fuesen de ceros completos, estas ocuparían las últimas posiciones). Al primer elemento no nulo de cada fila le llamaremos pivote^a o cabecera de la fila.

^a Siempre que no suponga una complicación en el resto de las operaciones, intentaremos que el pivote sea un 1

Ejemplo de matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & 5 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada reducida

Definición 1.3

Una matriz escalonada que además cumple la siguiente propiedad:
En las columnas en las que están ubicadas las cabeceras de las filas, todos los demás elementos son nulos. Además, los pivotes o cabeceras son 1
se dice que la matriz es escalonada reducida.

Ejemplo de matriz escalonada reducida

$$\text{Escalonada reducida} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 90 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 7 & 0 & -38 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss

Obsérvese que realizar las operaciones elementales con las ecuaciones del sistema es lo mismo que realizarlas con las filas de la matriz ampliada. De esta forma, el método de Gauss se modifica trabajando sobre la matriz ampliada, y consiste en conseguir un sistema equivalente al dado haciendo operaciones elementales con las filas de la matriz ampliada hasta obtener una *matriz escalonada*

Discusión de sistemas

Teorema 1.1

Sea un sistema con matriz de coeficientes escalonada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Las $m - r$ últimas filas de A sólo contienen ceros. El sistema verifica:

- ① es compatible si y sólo si los $m - r$ últimos términos independientes del sistema son ceros.
- ② en el caso de ser compatible, el sistema es compatible determinado si y sólo si $n = r$ y es compatible indeterminado si y sólo si $r < n$.

Ejemplos de resolución y discusión de sistemas

Ejemplo 1.3

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + x_3 & = & -3 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 & = & -7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 6 \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.4

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 7 \\ x_2 - x_4 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Ejemplos de resolución y discusión de sistemas

Ejemplo 1.5

Discute y resuelve, utilizando el método de Gauss, el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 & = & 40 \end{array} \right\}$$

Ejemplos con enunciado

Ejemplo 1.6

Un turista americano en Europa gastó al día por hospedaje 30 € en Inglaterra, 20 € en Francia y 20 € en España. En cuanto a alimentos, gastó 20 € en Inglaterra, 30 € en Francia y 20 € en España. Además para gastos varios utilizó 10 € al día en los tres países. Sabiendo que su gasto total en hospedaje fue de 340 €, en alimentación de 320 € y en gastos varios de 140 €, calcule cuántos días estuvo en cada uno de los tres países o bien pruébese que los datos son incompatibles.

Ejemplos con enunciados

Ejemplo 1.7

Tres jugadores disputaron un torneo y su puntuación se ha perdido, la única información de la que se dispone es la puntuación total de los jugadores 1 y 2, la puntuación total de los jugadores 2 y 3 y la puntuación total de los jugadores 3 y 1. Demuestre que a partir de estos datos, se puede calcular la puntuación individual de cada jugador. ¿Sería posible hacer lo mismo con 4 jugadores, y conociendo los resultados de las parejas 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4, y 4 y 1?

Sistemas homogéneos.

Definición 1.4

Diremos que el sistema de ecuaciones 1 es un sistema homogéneo si $b_i = 0$ para todo valor del índice i .

Nota 1.1

*Obsérvese que, al realizar operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada de un sistema homogéneo, los coeficientes de la columna correspondiente a los términos independientes no se modifican, es decir, la última columna siempre es nula. Según el teorema (1.1), este tipo de sistemas **siempre** son compatibles.*

Sistemas homogéneos.

Teorema 1.2

Supóngase que se tiene el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

y sean Υ y Γ dos soluciones de 2, y $\rho \in \mathbb{K}$, entonces $\Upsilon + \Gamma$ y $\rho\Upsilon$ son soluciones de 2

Sistema homogéneo asociado a un sistema

Definición 1.5

Dado

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \quad (3)$$

se llama sistema homogéneo asociado

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

Solución del sistema a partir de las del homogéneo asociado

Teorema 1.3

Si S_h es el conjunto de soluciones del sistema 4, el sistema 3 es compatible, y $p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es una solución de dicho sistema, entonces el conjunto de todas las soluciones de 3 se puede escribir como sigue:

$$S = \{s = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) / s = p + p_h \text{ con } p_h \in S_h\} \quad (5)$$

Un sistema homogéneo en economía

Una ciudad tiene tres industrias primarias: una mina de cobre, una empresa de transportes y una planta de energía eléctrica. Para producir 100 € de cobre la mina gasta 20 € de cobre, 10 de transportes y 20 de energía eléctrica. Para proporcionar 100 € de transportes se requiere 10 € de cobre, 10 de transportes y 40 de energía eléctrica. Para producir 100 € de energía eléctrica la planta destina 20 € de cobre, 20 de transporte y 30 de energía eléctrica. Suponga que durante el año hay una demanda externa de 1200000 € de cobre, 800000 € de transporte y 1500000 € de energía eléctrica. ¿Cuánto debe producir cada industria para satisfacer las demandas?