

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:
------------	---------	------

1. (1 punto) Se considera el conjunto $A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : x + y > 1, x^2 + (y - 1)^2 < 1, x < 0\}$. Halle un polinomio complejo que transforme A en $B = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : y > 0, (x - 1)^2 + y^2 < 2, x > 1\}$.

Solución: $p(z) =$

Razonamientos:

2. (4 puntos) (A) Halle y represente gráficamente los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\exp(\frac{i\pi z^2}{2}) = i$ y que cumplen $|z| \leq 2\sqrt{2}$.

Solución:

Cálculos:

$$e^{i\pi z^2/2} = i$$

$$e^{i\pi z^2/2} = e^{i\pi/2}$$

$$\frac{i\pi z^2}{2} = \frac{i\pi}{2} + 2k\pi i$$

$$z^2 = 1 + 4k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

- $k = 1, z^2 = 2\pi i \rightarrow z_1 = \sqrt{2\pi}e^{i\pi/4}, z_2 = \sqrt{2\pi}e^{i5\pi/4}$
- $k = 0, z^2 = \pi i \rightarrow z_3 = \sqrt{\pi}e^{i\pi/4}, z_4 = \sqrt{\pi}e^{i5\pi/4}$
- $k = -1, z^2 = 0, \rightarrow z_5 = 0$
- $k = -2, z^2 = -\pi i \rightarrow z_6 = \sqrt{\pi}e^{-i\pi/4}, z_7 = \sqrt{\pi}e^{i3\pi/4}$
- $k = -3, z^2 = -2\pi i \rightarrow z_8 = \sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}, z_9 = \sqrt{2\pi}e^{i3\pi/4}$

(B) Determine cuántos desarrollos de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ tiene $f(z) = \frac{\log_{3\pi/4}(4+z)}{\exp(\frac{i\pi z^2}{2}) - i}$ e indique dónde son válidos.

Solución: Tiene desarrollos válidos en

Cálculos y razonamientos:

(C) Halle a_0 tal que $\frac{\log_{3\pi/4}(4+z)}{z^2} + \frac{z^2}{z-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ en $2 < |z| < 2\sqrt{2}$.

Solución: $a_0 =$

Cálculos y razonamientos:

(D) Halle el valor de $I = \int_{\sigma} \frac{1}{\exp(\frac{i\pi z^2}{2}) - i} dz$, siendo σ la poligonal que recorre, en el orden indicado, los puntos $3/2 + i/2$, $-1/2 + i/2$, $-1/2 - i/2$, $3/2 - i/2$ y $3/2 + i/2$.

Solución: $I =$

Cálculos:

(E) Halle el valor de $I = \int_{\sigma} \frac{1}{(\exp(\frac{i\pi z^2}{2}) - i)(z - 1)} dz$, siendo σ la poligonal que recorre, en el orden indicado, los puntos $3/2 + i/2$, $-1/2 + i/2$, $-1/2 - i/2$, $3/2 - i/2$ y $3/2 + i/2$.

Solución: $I =$

Cálculos:

APELLIDOS:	NOMBRE:	DNI:
------------	---------	------

3. (1 punto) Se considera la sucesión $\{s_k\}_{k=0}^{+\infty} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$. Resuelve la ecuación en diferencias $y_{k+2} + y_k = s_k$, con $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.

Solución: $y_k =$

Cálculos y razonamientos:

4. (2 puntos) Para $k \in \mathbb{R}$, Sea S_{f_k} la serie de Fourier en senos de la función $f_k(t) = \begin{cases} k t & t \in [0, 1] \\ k^2 & t \in]1, 2] \end{cases}$

(A) Estudie si la serie es convergente, calcule b_1 , $S_{f_k}(-3)$ y $S_{f_k}(87/2)$.

Solución: $b_1 =$ $S_{f_k}(-3) =$ $S_{f_k}(87/2) =$

Cálculos y razonamientos:

(B) Estudie si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \pi t}{2}\right)$, $\forall t \in [0, 2]$.

Solución: ¿Existe k ? $\begin{cases} Si \square \\ No \square \end{cases}$ valor $k =$

Razonamientos y cálculos:

(C) Estudie si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$, $\forall t \in [0, 2]$.

Solución: ¿Existe k ? $\begin{cases} Si \square \\ No \square \end{cases}$ valor $k =$

Razonamientos y cálculos:

5. (1 punto) Resuelva el problema $u_t(x, t) - 4u_{xx}(x, t) = 0$ con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, que cumple $u(x, 0) = e^{-x^2/4}$ con $x \in \mathbb{R}$.

Solución: $u(x, t) =$

Razonamientos:

6. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable y sea $g(x) = f(3x + 1)$. A partir de la definición, halle la transformada de Fourier de g en función de la de f .

Solución:

Razonamientos: