

Capítulo 5

Clasificación de ceros de una función y transformada z.

5.1. Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor de grado n de $f(z)$ en $z = a$ está definido por:

$$P_n(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Si f es analítica en $B(a, R)$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = f(z)$ para todo $z \in B(a, R)$. Este resultado también puede expresarse como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \text{ para todo } z \in B(a, R)$$

Las siguientes órdenes serán útiles para el desarrollo de esta práctica

Orden	Salida
<code>taylor(f, n, z, a)</code>	Calcula el polinomio de Taylor de grado $n - 1$ de la función $f(z)$ en potencias de $(z - a)$ (n número natural, z variable simbólica, f , función simbólica de la variable simbólica z y a una variable simbólica o una constante).
<code>taylor(f, z)</code>	Toma por defecto $n=6$, $a=0$.

Ejemplo 28 Calcule los polinomios de Taylor de grado 5 de $f(z) = \sin(z)$ en torno a $z = 0$ y a $z = 1$.

Solución: Los polinomios se obtienen con las instrucciones:

```

» syms z
» p0=taylor(sin(z),z); %por defecto toma a=0
» p1=taylor(sin(z),6,z,1);

```

5.2. Clasificación de un cero

Una función f analítica en a tiene un cero de orden n si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si a_k son los coeficientes del desarrollo de Taylor de f en el punto a , f tiene en a un cero de orden n si, y sólo si, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ y $a_n \neq 0$.

Ejemplo 29 Calcule el orden del cero $z = 0$ para la función $f(z) = \sin(z) - z$.

Solución:

El problema puede resolverse observando el desarrollo de Taylor:

```

>> syms z
>> f=sin(z)-z
f = sin(z)-z
>> taylor(f)
ans = -1/6*z^3+1/120*z^5

```

El primer término no nulo es el coeficiente de grado tres, por lo tanto, el orden del cero es 3.

También se pueden estudiar las derivadas sucesivas:

```

>> syms z
>> f=sin(z)-z
f =
sin(z)-z
>> subs(f,z,0)==0
ans =
1
>> subs(diff(f,z,1),z,0)==0
ans =
1
>> subs(diff(f,z,2),z,0)==0
ans =
1
>> subs(diff(f,z,3),z,0)==0
ans =
0

```

En ocasiones, si no se tienen en cuenta posibles errores de redondeo, pueden obtenerse conclusiones falsas como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 30 Dada la función: $f(z) = \sin^2(z)$, estudie el orden del cero $z_0 = 2\pi$.

Solución:

Analíticamente: $f(2\pi) = \sin(2\pi)^2 = 0$, sin embargo con MATLAB no sería un cero, ya que:

```
>> syms z
>> f=sin(z)^2
f =
sin(z)^2
>> subs(f,z,2*pi)
ans =
5.9990e-032
```

Evidentemente el valor obtenido es prácticamente 0, pero si lo comparamos con el valor 0 se obtiene que no es cierto, esto es debido al error de redondeo. Puede resolverse este problema como sigue:

```
>> abs(subs(f,z,2*pi))<10^(-15)
ans =
1
```

Para calcular el orden de $z_0 = 2\pi$ podríamos escribir en un fichero m:

```
syms z
f=sin(z)^2;
z0=2*pi;
if abs(subs(f,z,z0))>10^(-15)
    error('No se trata de un cero')
end
k=1;
while abs(subs(diff(f,z,k),z,z0))<10^(-15)
    k=k+1;
end
orden=k
```

5.3. Transformada z.

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{z^k} = X(z) \text{ si } 0 \leq r_1 < |z|$$

La función suma, $X(z)$ recibe el nombre de transformada z de $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ y la sucesión se dice que es la transformada z inversa de $X(z)$. Se suelen utilizar las notaciones: $X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\}$ y $\mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = \{x_k\}$.

Función	Salida
<code>ztrans(xk,k,z)</code>	Calcula la transformada z de la sucesión xk , siendo k su variable y z la variable independiente de la función resultante.
<code>iztrans(Xz,z,k)</code>	Calcula la transformada z inversa de la función Xz , siendo z su variable independiente y k la variable de la sucesión resultante.

Ejemplo 31 Calcule la transformada z de $\{2^k\}_{k=0}^{\infty}$ y la transformada z inversa de $\frac{z}{z-2}$.

SOLUCIÓN:

```
>> syms z
>> syms k real
>> X=ztrans(2^k,k,z);
>> X=simplify(X);
>> pretty(X)

>> xk=iztrans(z/(z-2),z,k)
xk = 2^k
```

$$\frac{z}{z-2}$$

Ejemplo 32 Calcule la transformada z de $\{a^k\}_{k=0}^{\infty}$, siendo a un número complejo.

SOLUCIÓN:

```
>> syms z a
>> syms k real
>> X=ztrans(a^k,k,z);
>> X=simple(X);
>> pretty(X)
```

$$\frac{z}{-z+a}$$

Ejemplo 33 Calcule la transformada z inversa de $X(z) = \frac{1}{z^2}$.

SOLUCIÓN:

Puesto que x_k , para $k = 0, 1, 2, \dots$, es el coeficiente de $\frac{1}{z^k}$ en la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{z^k}$, la transformada inversa de $\frac{1}{z^2}$ será, obviamente:

$$x_k = \begin{cases} 1 & k = 2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases}$$

En MATLAB se tendría:

```
>> syms z
>> syms k real
>> xk=iztrans(1/z^2, z, k)
xk = charfcn[2](k)
```

Nota: La expresión **charfcn**[k_0](k) representa la sucesión $x_k = \begin{cases} 1 & k = k_0 \\ 0 & k \neq k_0 \end{cases}$

5.4. Resolución de ecuaciones en diferencias mediante la transformada z .

Transformada de una sucesión adelantada:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y_{k+k_0}\} &= z^{k_0} \mathcal{Z}\{y_k\} - \sum_{k=0}^{k_0-1} y_k z^{k_0-k} = \\ &= z^{k_0} \mathcal{Z}\{y_k\} - (y_0 z^{k_0} + y_1 z^{k_0-1} + \dots + y_{k_0-1} z^1) \end{aligned}$$

Ejemplo 34 Halle el término general de la sucesión $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ sabiendo que $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{3}{2}$ y que $8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9$ para $k \geq 0$.

SOLUCIÓN:

- Obtención de $Y(z)$, transformada z de $\{y_k\}$:

Aplicando la transformada z a la ecuación en diferencias y utilizando la linealidad de la transformada se tiene :

$$8\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} - 6\mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + \mathcal{Z}\{y_k\} - \mathcal{Z}\{9\} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{Z}\{9\} = \mathcal{Z}\{9 \cdot 1^k\} = 9\mathcal{Z}\{1^k\} = 9\frac{z}{z-1}$ y aplicando la fórmula para la transformada z de una sucesión adelantada se tiene que:

$$8[z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1] - 6[zY(z) - zy_0] + Y(z) - \frac{9z}{z-1} = 0$$

Sustituyendo y_0 e y_1 por su valor y agrupando queda:

$$(8z^2 - 6z + 1)Y(z) = \frac{9z}{z-1} + 8z^2 + 6z = z\frac{8z^2 - 2z + 3}{z-1}$$

Despejando $Y(z)$ se obtiene que la transformada z de la sucesión $\{y_k\}$ es:

$$Y(z) = z\frac{8z^2 - 2z + 3}{(z-1)(8z^2 - 6z + 1)}$$

■ Cálculo de la transformada inversa:

Descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$Y(z) = z\left(\frac{2}{z-1/4} - \frac{4}{z-1/2} + \frac{3}{z-1}\right)$$

es decir,

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1/4} - \frac{4z}{z-1/2} + \frac{3z}{z-1}$$

Calculando la transformada z inversa del segundo miembro se obtiene la sucesión buscada:

$$y_k = 2\left(\frac{1}{4}\right)^k - 4\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3$$

La técnica utilizada en la resolución del ejemplo anterior puede realizarse en MATLAB del siguiente modo:

Ejemplo 35 Resuelva, utilizando MATLAB, la ecuación en diferencias:

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9 \cdot 1^k, y_0 = 1, y_1 = \frac{3}{2}$$

para $k \geq 0$.

En el archivo **ec_dif1.m**, se escriben las siguientes instrucciones:

```
% Resolución de la ecuación en diferencias:
%      8y_(k+2) - 6y_(k+1) + y_k = 9
%      y0=1, y1=3/2
```

```

syms z k
syms Yz % variable que representa la transformada z de y_k

A=1;B=-6;C=8; % coef. de A y_k+ B y_(k+1)+ C y_(k+2)
y0=1; y1=3/2; % Datos iniciales
fk=9;          % Segundo miembro

% Transformada de sucesión adelantada:
Yz1=z*Yz-y0*z;          % transformada de y_k+1
Yz2=z^2*Yz-y0*z^2-y1*z; % transformada de y_k+2

% Ecuación en Yz (Yz denota la transformada z de y_k):
ec=C*(Yz2)+B*(Yz1)+A*Yz-ztrans(fk,k,z);

% Se "despeja" Yz en la ecuación anterior:
disp('Transformada z de yk') Yz=solve(ec,Yz)

% Cálculo de la transformada inversa:
yk=iztrans(Yz,z,k); disp('Solución: yk=') pretty(yk)

```

Escribiendo el nombre del archivo en la línea de comandos:

```

>> ec_dif1
>> Transformada z de yk
Yz = z*(8*z^2-2*z+3)/(z-1)/(8*z^2-6*z+1)

```

Solución: $y_k =$

$$3 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.1 Programa una función $[n]=\text{orden_cero}(f, z, z_0)$ que clasifique el cero z_0 de la función $f(z)$. La variable de salida sería, n , el orden del cero, y tomaría el valor 0 en el caso de que $f(z_0) \neq 0$.

Ejercicio 5.2 Programa una función $[p]=\text{PTaylor}(f, z, z_0, n)$ que calcule el polinomio de Taylor de grado n de la función simbólica f en potencias de $(z - z_0)$.

Ejercicio 5.3 Sea $f(z) = \frac{z+i}{z^9 - z^2 - z}$ y $z_0 = \frac{i}{2}$. Almacene en el archivo `ej5_3.m` las instrucciones necesarias para realizar las siguientes tareas:

1. Calcular el polinomio de Taylor de grado 10 de f en torno a z_0 .
2. Calcular el radio de convergencia R de dicha serie (**Sugerencia:** Utilice el comando **solve** para obtener el dominio de analiticidad de f y aplique que $R = \sup \{r \in \mathbb{R} : f \text{ es analítica en } B(z_0, r)\}$).
3. Representar en la misma ventana gráfica: z_0 (punto rojo), los ceros del denominador de f (puntos azules) y la circunferencia $C(z_0, R)$. Utilice la misma escala para ambos ejes (`axis equal`).

Ejercicio 5.4 Escriba en el archivo las instrucciones necesarias para resolver, utilizando MATLAB, la ecuación en diferencias: $y_{k+3} - (2+i)y_{k+2} + (1+2i)y_{k+1} - iy_k = 2(i^k)$; $y_0 = y_1 = y_2 = 0$. (Solución: $y_k = (-1+i)i^k + ki^k + (1-i) + ik$)

Ejercicio 5.5 Programe una función `[yk]=ec_dif_3gr(C, fk, di)` que calcule la sucesión y_k solución de la ecuación en diferencias: $y_0 = di(1)$, $y_1 = di(2)$, $y_2 = di(3)$, $C(4)y_{k+3} + C(3)y_{k+2} + C(2)y_{k+1} + C(1)y_k = fk$. Verifique su funcionamiento con la ecuación en diferencias del ejercicio anterior.

Ejercicio 5.6 Almacene las instrucciones para los apartados siguientes en el archivo `ej5_6.m`.

- a) Utilice la función `ec_dif_3gr` para obtener el término general de la sucesión de Fibonacci: $y_0 = 1$, $y_1 = 1$ e $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$, para $k \geq 0$ y calcule el valor de x_{15} .
- b) Obtenga el valor de x_{15} directamente de la ecuación en diferencias mediante la instrucción **for**.
- c) Demuestre que la sucesión obtenida verifica la ecuación en diferencias.