

Tema 10

Transformada de Fourier

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Ejemplos

Ejemplo 10.1

Sean $\alpha, A \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Halle la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ |A|e^{-\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Transformada de Fourier

Definición 10.1

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se llama **transformada de Fourier** de f a la función $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} f(t) dt \quad (1)$$

Notación: $\hat{f}$, $\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}(f(t))$.

Propiedades

Proposición 10.1

(linealidad) Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g) \quad (2)$$

Proposición 10.2

(retraso) Sea f función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Se considera la función $g(t) = f(t - t_0)$. Se verifica entonces que

$$\hat{g}(s) = e^{-ist_0} \hat{f}(s) \quad (3)$$

Propiedades

Proposición 10.3

(cambio de escala) Sea f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $g(t) = f(\alpha t)$ entonces:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (4)$$

Proposición 10.4

Sea $f \in \mathcal{C}^{(+\infty)}(\mathbb{R})$, f y f' absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ entonces

$$\widehat{f'}(s) = (is) \hat{f}(s) \quad (5)$$

$$\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \hat{f}(s) \quad (6)$$

Propiedades

Proposición 10.5

Sea f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $g(x) = \cos(cx)f(x)$ y $h(x) = \sin(cx)f(x)$ se verifica que

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{2} (\hat{f}(s - c) + \hat{f}(s + c)) \quad (7)$$

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{2i} (\hat{f}(s - c) - \hat{f}(s + c)) \quad (8)$$

Convolución

Definición 10.2

Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$. Se llama **convolución** de f y g a la función

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x - t) dt \quad (9)$$

Se verifica que la convolución es conmutativa, $f * g = g * f$, y asociativa, $(h * g) * f = h * (g * f)$.

Composición

Proposición 10.6

Sean f y g dos funciones absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ y sea $h = f * g$. Se verifica entonces que

$$\hat{h}(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \quad (10)$$

Algunas transformadas

$H(t-a) - H(t-b), a < b$	$\frac{e^{-ias} - e^{-ibs}}{is}$
$H(t+b) - H(t-b), b > 0$	$\frac{2 \operatorname{sen}(bs)}{s}$
$e^{-at}H(t), a > 0$	$\frac{1}{a+is}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{s^2 + a^2}$
$\frac{1}{t^2 + c^2}, c > 0$	$\frac{\pi}{c} e^{-c s }$
$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$

Transformada inversa

Definición 10.3

Dada g absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, se llama **transformada inversa de Fourier** de g a la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ist} g(s) ds \quad (11)$$

Convergencia

Teorema 10.1

Sea f absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y que satisface las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo acotado. Entonces:

- f es continua en $t \rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) e^{ist} ds = f(t) \quad (12)$$

- f no es continua en $t \rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) e^{ist} ds = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) \quad (13)$$

Nota

La relación anterior suele expresarse

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx \right) e^{ist} ds \quad (14)$$

Aplicación a edp

Ejemplo 10.2

(La ecuación del calor)

Se considera el problema

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (16)$$

Solución

$$U(s, t) = e^{-s^2 t} c(s)$$

Condición inicial

$$c(s) = \hat{u}_0(s), \quad U(s, t) = e^{-s^2 t} \hat{u}_0(s)$$

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(U(\cdot, t))$$

Solución

Se considera

$$U(s, t) = \widehat{u(\cdot, t)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} u(x, t) dx$$

El problema queda

$$U_t(s, t) + s^2 U(s, t) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (17)$$

$$U(s, 0) = \hat{u}_0(s), \quad s \in \mathbb{R} \quad (18)$$

Ejemplo

Ejemplo 10.3

Resuelva el problema del calor para el caso $u_0(x) = e^{-x^2}$

Solución

Se tiene

$$\hat{u}_0(s, t) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

de donde

$$U(s, t) = \hat{u}_0(s) \cdot e^{-s^2 t} = \sqrt{\pi} e^{-s^2(t + \frac{1}{4})}$$

Hallamos la transformada inversa y obtenemos la solución formal

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$$

Solución

En general, podemos expresar la solución usando la convolución.

Para cada $t > 0$ sea

$$g(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Se obtiene

$$u(x, t) = (u_0 * g(\cdot, t))(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \cdot g(x - y, t) dy \quad (19)$$

Ejemplo

Ejemplo 10.4

Halle la solución al problema del calor para el caso

$$u_0(x) = H(x) - H(x - 1).$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} * [H(x) - H(x - 1)] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \cdot [H(y) - H(y - 1)] dy =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

La ecuación de ondas

Ejemplo 10.5

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (21)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (22)$$

Sea

$$U(s, t) = \widehat{u(\cdot, t)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} u(x, t) dt$$

Solución

El problema se convierte en

$$U_{tt}(s, t) + s^2 U(s, t) = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (23)$$

$$U(s, 0) = \hat{u}_0(s), \quad s \in \mathbb{R} \quad (24)$$

$$U_t(s, 0) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (25)$$

Solución

$$U(s, t) = a(s)e^{ist} + b(s)e^{-ist}$$

Condiciones iniciales

$$a(s) = b(s)$$

$$a(s) + b(s) = \hat{u}_0(s)$$

Luego $U(s, t) = \frac{\hat{u}_0(s)}{2}(e^{ist} + e^{-ist})$ Aplicando la propiedad del retraso

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - t) + u_0(x + t))$$