

Tema 9: Ecuaciones en derivadas parciales

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Edp lineales con coeficientes constantes

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + D \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + E \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + F u(x, y) = f(x, y)$$

Estas ecuaciones se clasifican en

- elípticas: si $B^2 - 4AC < 0$
- parabólicas: si $B^2 - 4AC = 0$
- hiperbólicas: si $B^2 - 4AC > 0$

Índice

- 1 EDP lineales con coeficientes constantes
- 2 La ecuación de Laplace
- 3 La ecuación del calor
- 4 La ecuación de ondas

Modelos básicos

- la ecuación de Laplace (elíptica)

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

- la ecuación del calor (parabólica)

$$u_t(x, t) - k u_{xx}(x, t) = 0$$

- la ecuación de ondas (hiperbólica)

$$u_{tt}(x, t) - c u_{xx}(x, t) = 0$$

La ecuación de Laplace.

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (1)$$

Separación de variables: buscamos una solución de la forma

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene la relación

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Resolución

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que se verifiquen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3)$$

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad (4)$$

Soluciones

- $\lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} X(x) = ax + b \\ Y(y) = cy + d \end{cases}$
- $\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ Y(y) = ce^{-\sqrt{\lambda}y} + de^{\sqrt{\lambda}y} \end{cases}$
- $\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} X(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x} \\ Y(y) = c \cos(\sqrt{-\lambda}y) + d \sin(\sqrt{-\lambda}y) \end{cases}$

donde a, b, c y d son constantes arbitrarias.

Soluciones

- $\lambda = 0 \rightarrow 1, x, y, xy$
- $\lambda > 0 \rightarrow \begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}y} \cos(\sqrt{\lambda}x), e^{-\sqrt{\lambda}y} \cos(\sqrt{\lambda}x), \\ e^{\sqrt{\lambda}y} \sin(\sqrt{\lambda}x), e^{-\sqrt{\lambda}y} \sin(\sqrt{\lambda}x), \end{cases}$
- $\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} e^{\sqrt{-\lambda}x} \cos(\sqrt{-\lambda}y), e^{-\sqrt{-\lambda}x} \cos(\sqrt{-\lambda}y), \\ e^{\sqrt{-\lambda}x} \sin(\sqrt{-\lambda}y), e^{-\sqrt{-\lambda}x} \sin(\sqrt{-\lambda}y), \end{cases}$

Combinaciones lineales de estas funciones verifican la ecuación de Laplace

Uso de series de Fourier

Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$ y f_0, f_1, g_0, g_1 funciones definidas en $[0, 1]$.
Consideramos el problema

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overset{\circ}{D} \quad (5)$$

con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (6)$$

$$u(x, 1) = f_1(x), \quad x \in [0, 1] \quad (7)$$

$$u(0, y) = g_0(y), \quad y \in [0, 1] \quad (8)$$

$$u(1, y) = g_1(y), \quad y \in [0, 1] \quad (9)$$

Solución

Supondremos en primer lugar que $f_1 = g_0 = g_1 = 0$.
Buscamos X solución de

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad x \in (0, 1) \quad (10)$$

con las condiciones de contorno

$$X(0) = X(1) = 0 \quad (11)$$

$X(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ es solución

Solución

Si $\lambda = 0$ ó si $\lambda < 0$, $X = 0$

Para el caso $\lambda > 0$

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \quad (12)$$

y la solución es, para cada $n = 1, 2, \dots$

$$X_n(x) = a_n \sin(\pi n x) \quad (13)$$

Solución

Buscamos $Y(y)$

$$Y''(y) - n^2 \pi^2 Y(y) = 0, \quad y \in (0, 1) \quad (14)$$

$$Y(1) = 0 \quad (15)$$

Se obtiene como solución

$$Y_n(y) = b_n \sinh(n\pi(1 - y)) \quad (16)$$

Solución

Entonces, las funciones

$$u_n(x, y) = \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi(1 - y)) \quad (17)$$

son solución de (5), (7), (8) y (9).

La función $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, y)$ es una solución formal.

Imponemos la condición contorno (6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(n\pi x) \cdot \sinh(n\pi) = f_0(x) \quad (18)$$

$c_n \cdot \sinh(n\pi)$ son los coeficientes de Fourier de f_0 en el intervalo $[0, 1]$ en serie de senos.

La ecuación del calor

$$u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$Au(0, t) + Bu_x(0, t) = U_0(t), \quad t > 0$$

$$Au(L, t) + Bu_x(L, t) = U_1(t), \quad t > 0$$

$$F = 0, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad k = 1, \quad A = C = 0, \quad B = D = 1.$$

Problema

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (20)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (21)$$

$$u_x(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (22)$$

Separación de variables

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda \rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (23)$$

$$X'(0) = X'(L) = 0, \quad (24)$$

Solución

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

Condiciones de contorno

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (25)$$

$$X_n(x) = a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (26)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (27)$$

Solución

$$T_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad (28)$$

$$u_n(x, t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad (29)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, t) \quad (30)$$

Condición inicial

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \quad (31)$$

La ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) - cu_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$Au(0, t) + Bu_x(0, t) = U_0(t), \quad t > 0$$

$$Cu(L, t) + Du_x(L, t) = U_1(t), \quad t > 0$$

$$F = 0, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \quad c = 1, \quad A = C = 1, \quad B = D = 0.$$

Problema

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (33)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (34)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (35)$$

Separación de variables

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L \quad (36)$$

$$X'(0) = X'(L) = 0, \quad (37)$$

Solución

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (38)$$

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (39)$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0 \quad (40)$$

$$T_n(t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (41)$$

Solución

Buscamos entonces u

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x, t) \quad (42)$$

siendo

$$u_n(t) = \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Condiciones iniciales

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \quad (43)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_1(x) \quad (44)$$