

## Tema 8: Series de Fourier

Marisa Serrano,  
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: [mlserrano@uniovi.es](mailto:mlserrano@uniovi.es)  
email: [jahuidobro@uniovi.es](mailto:jahuidobro@uniovi.es)

## Funciones periódicas

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función **periódica** si existe  $T \in \mathbb{R}$  tal que  $f(t + kT) = f(t)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Llamaremos **periodo fundamental** al menor valor  $T > 0$  que cumple la relación anterior.

Para dar una medida del número de repeticiones por unidad de  $t$  se define la **frecuencia** como  $\frac{1}{T}$  y si queremos la medida del número de repeticiones por 'vuelta', se utiliza el concepto de **frecuencia angular**  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

## Índice

1 Singularidades aisladas

2 Teorema de los residuos

## Algunas funciones periódicas

### Ejemplo 8.1

Las funciones  $\sin(t)$  y  $\cos(t)$  son funciones periódicas de periodo fundamental  $2\pi$  y frecuencia angular 1

### Ejemplo 8.2

La función  $A \sin(\lambda t + \phi)$  es periódica de periodo fundamental  $\frac{2\pi}{\lambda}$ , y frecuencia angular  $\lambda$ , al valor  $A$  se le llama amplitud, y a  $\phi$  se le llama fase.

## Desarrollo en serie de Fourier

Buscamos expresar una función de periodo  $T$  y frecuencia angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  como suma de una serie del tipo:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

Nos preguntamos ¿cómo debe ser  $f$  para que exista dicha serie?  
¿cómo calcular los coeficientes  $A_0, a_n, b_n$ ?

## Restricción de la función periódica a su intervalo fundamental

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función periódica de periodo  $T$ . Por la periodicidad, es suficiente trabajar en un intervalo cualquiera de longitud  $T$ , aunque por simplicidad en las propiedades suele tomarse el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

## Relaciones de Euler

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega t) \cdot \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{T}{2} & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(nt) \cdot \cos(mt) dt = 0 \quad (4)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ T & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(nt) dt = 0. \quad (6)$$

## Cálculo de los coeficientes

Para calcular los coeficientes multiplicamos la igualdad (??) por  $\cos(m\omega t)$  e integramos en el intervalo fundamental.

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (7)$$

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega t) dt \quad (8)$$

Si ahora multiplicamos (1) por  $\sin(m\omega t)$  e integramos, obtenemos

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(m\omega t) dt \quad (9)$$

## Serie de Fourier

### Definición 8.1

Dada  $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , se llama **serie de Fourier** de  $f$  en el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  a la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (10)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (11)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (12)$$

## Notas

Suponemos que  $f$  es tal que las integrales que aparecen en (??) y (??) existen. Esto sucede, por ejemplo, si  $f$  es continua a trozos en  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

Suele escribirse

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (13)$$

## Ejemplos

### Ejemplo 8.3

Halle la serie de Fourier de la función

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Es frecuente escribir la función  $f$  en la forma

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases}$$

quedando sin precisar el valor de  $f$  en el punto 0.

## Ejemplos

### Ejemplo 8.4

Halle la serie de Fourier de  $f(t) = t$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ .

### Ejemplo 8.5

Halle la serie de Fourier de  $f(t) = t^2$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ .

### Ejemplo 8.6

Halle la serie de Fourier de  $f(t) = |t|$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ .

## Funciones pares e impares

### Proposición 8.1

Sea  $f : \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  y sea su serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

(a) Si  $f$  es par, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = 0 \quad (14)$$

(b) Si  $f$  es impar, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (15)$$

Buscamos desarrollar una función  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  en serie trigonométrica en la que sólo aparezcan senos o cosenos, es decir, buscamos un desarrollo como sigue:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t), \quad f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

## Extensión par de $f$

### Definición 8.2

Sea  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función, llamaremos su extensión periódica par a la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par y periódica de periodo  $2T$  definida como sigue:

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ f(-t) & -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$F(t + 2T) = f(t)$$

## Serie en cosenos

Si  $f$  satisface las condiciones de Dirichlet en  $[0, T]$ , también las cumple  $F$  en  $[-T, T]$ , y podemos realizar el desarrollo de Fourier, que, al ser  $F$  es una función par, verificará  $b_n = 0$ , por lo que obtenemos que, si  $t \in [0, T]$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

Al desarrollo obtenido se le denomina desarrollo en serie de Fourier de cosenos.

## Extensión impar de $f$

### Definición 8.3

Sea  $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una función, llamaremos su extensión periódica impar a la función  $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par y periódica de periodo  $2T$  definida como sigue:

$$G(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t \leq T \\ -f(-t) & -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$$G(t + 2T) = f(t)$$

### Ejemplo 8.7

Se considera la función  $f(t) = t$  definida en el intervalo  $[0, 4]$ , obtener un desarrollo en serie de cosenos y un desarrollo en serie de senos. Dibuja las gráficas de las extensiones periódicas par e impar de la función  $f$  en el intervalo  $[-12, 12]$

## Serie en senos

Si  $f$  satisface las condiciones de Dirichlet en  $[0, T]$ , también las cumple  $G$  en  $[-T, T]$ , y podemos realizar el desarrollo de Fourier, que, y dado que  $G$  es una función impar, verificará  $b_n = 0$ , por lo que obtenemos que, si  $t \in [0, T]$

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt$$

Al desarrollo obtenido se le denomina desarrollo en serie de Fourier de senos.

## Linealidad

### Proposición 8.2

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones definidas en el intervalo  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  cuyos coeficientes de Fourier son  $a'_n, b'_n$  y  $a''_n, b''_n$ . Se verifica entonces que,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$  los coeficientes de la serie de Fourier de  $\lambda f + \mu g$  son  $a_n = \lambda a'_n + \mu a''_n$  y  $b_n = \lambda b'_n + \mu b''_n$ .

### Ejemplo 8.8

Halle los coeficientes de la serie de Fourier de  $f(t) = t + t^2$ ,  $t \in (-\pi, \pi)$ .

## Ejercicios

### Ejemplo 8.9

Estudie si las funciones siguientes verifican las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ :

$$f(t) = \frac{1}{3-t}, \quad g(t) = \sin\left(\frac{1}{t-2}\right), \quad h(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

## Condiciones de Dirichlet

### Teorema 8.1

Sea  $f : \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  acotada, tal que:

- a) tiene un número finito de discontinuidades y existen los límites laterales  $\forall t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  y
- b) tiene un número finito de máximos y mínimos aislados.

La serie de Fourier de su extensión periódica es convergente  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Además,

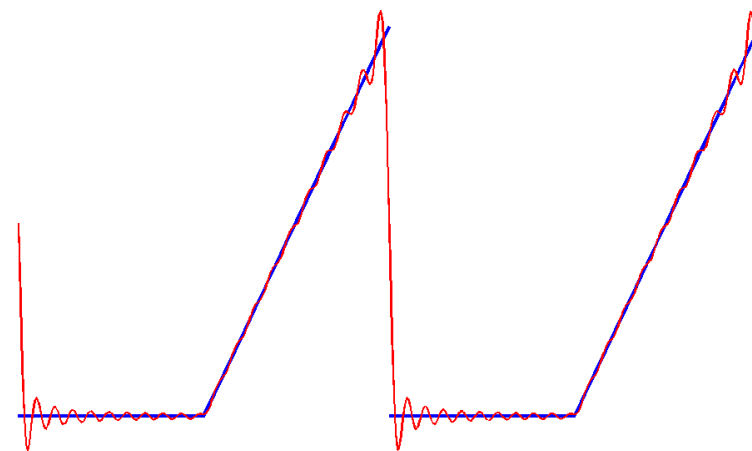
- si  $f$  es continua en  $t$ , la serie converge a  $f(t)$  y,
- si  $f$  es discontinua en  $t$  la serie converge a  $\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$ .

## Observaciones

- Las condiciones de Dirichlet, son condiciones suficientes de convergencia de la serie de Fourier, no necesarias, por lo que puede haber funciones que no las verifiquen cuya serie de Fourier sea convergente.
- Si la función  $f$  es periódica de periodo  $T$ , pueden estudiarse las condiciones de Dirichlet para cualquier intervalo de la forma  $\left[d - \frac{T}{2}, d + \frac{T}{2}\right]$ , donde  $d \in \mathbb{R}$  cualquiera.

## El fenómeno de Gibbs

- Es habitual utilizar las series de Fourier para aproximar funciones por un número finito de sumandos.
- En este sentido conviene observar que en torno a los puntos de discontinuidad de la función la suma parcial de la serie posee unas oscilaciones que no desaparecen si se aumenta el número de términos, esto es conocido como **fenómeno de Gibbs**.



## Forma compleja

### Proposición 8.3

Sea  $f : \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int\omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{n=N} c_n e^{int\omega} \quad (16)$$

donde  $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-int\omega} dt, \forall n \in \mathbb{Z}$ ,

Además, si  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (17)$$

## Integración de series de Fourier

### Proposición 8.4

Si  $f$  es una función que satisface las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $[-T/2, T/2]$  cuya serie de Fourier es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(wnx) + b_n \sin(wnx))$$

Si  $t_1, t \in [-T/2, T/2], t_1 < t$ , entonces:

$$\int_{t_1}^t f(x) dx = \frac{a_0}{2}(t - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^t (a_n \cos(wnx) + b_n \sin(wnx)) dx \quad (18)$$

## Nota

Si integramos:

$$\int_{t_1}^t f(x) dx = \frac{a_0 t}{2} + A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-b_n}{wn} \cos(nwt) + \frac{a_n}{wn} \sin(nwt) \right)$$

con  $A = \frac{-a_0 t_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-a_n}{wn} \sin(wnt_1) + \frac{b_n}{wn} \cos(wnt_1) \right)$  Pasando

$\frac{a_0 t}{2}$  al primer miembro, queda la serie de Fourier de la función

$$g(t) = \int_{t_1}^t f(x) dx - \frac{a_0 t}{2}$$

### Ejercicio 8.1

Se considera la función  $f(t) = t^2$  en  $[-\pi, \pi]$ . Integrando su serie de Fourier halle la serie de Fourier de  $g(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{\pi^2}{3}t$  en  $[-\pi, \pi]$ .

## Derivación

### Proposición 8.5

Sea  $f$  satisfice las condiciones de Dirichlet en el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  y sea su serie de Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

Si  $f$  es continua  $\forall x \in \mathbb{R}$  y su derivada verifica las condiciones de Dirichlet en  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , entonces la serie de Fourier de  $f'$  es

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))'$$

### Ejercicio 8.2

Verifique la proposición anterior obteniendo la serie de Fourier de  $f(t) = t$  derivando la serie de Fourier de la función  $f(t) = t^2$  en  $[-\pi, \pi]$ .