

Tema 7: Residuos y Polos

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Singularidades aisladas

Definición 7.1

Una función f se dice que tiene en z_0 una **singularidad aislada** si $\exists r > 0$ tal que f es analítica en $0 < |z - z_0| < r$. En el punto z_0 la función no es analítica o no está definida.

Ejemplo 7.1

$f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ y $g(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ tienen en cero una singularidad aislada.

Ejemplo 7.2

Halle los puntos donde las funciones $f(z) = \log_0(z)$ y $g(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ no son analíticas y estudie si son singularidades aisladas.

Índice

1 Singularidades aisladas

2 Teorema de los residuos

Singularidades evitables

Sea z_0 una singularidad aislada de una función f y sea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

el desarrollo de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < r$.

z_0 es **singularidad evitable** si $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

En este caso la función f puede extenderse al punto z_0 como una función analítica definiendo $f(z_0) = a_0$.

Polos

z_0 es **polo** si sólo hay un número finito de coeficientes no nulos con subíndice negativo. El polo es de **orden** m , $m \in \mathbb{N}$, si $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < -m$ y $a_{-m} \neq 0$. El desarrollo es del tipo:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2)$$

En el caso de que el polo sea de orden uno suele decirse que es un **polo simple**.

Singularidades esenciales

z_0 es una **singularidad esencial** si no es evitable ni polo. En el desarrollo hay por tanto infinitos coeficientes con subíndice negativo no nulos.

Ejemplos

Ejemplo 7.3

Estudie el tipo de singularidad que presentan las funciones siguientes en los puntos indicados:

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ en 0.

(b) $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$ en 0.

(c) $h(z) = e^{1/(z-i)}$ en i .

Clasificación de polos

Proposición 7.1

Sea z_0 una singularidad aislada de una función f . El punto z_0 es un polo de orden m si, y sólo si, existe una función g analítica en z_0 tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ en un entorno de z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Cálculo del orden de un polo

Supongamos que f es el cociente de dos funciones f_1 y f_2 que presentan en z_0 un cero de orden n_1 y n_2 respectivamente, $n_2 > n_1$. Podemos escribir entonces:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{(z - z_0)^{n_1} g_1(z)}{(z - z_0)^{n_2} g_2(z)}$$

g_1 y g_2 analíticas y $g_1(z_0), g_2(z_0) \neq 0$. Entonces

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{(z - z_0)^{n_2 - n_1}} \text{ con } g(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}. \text{ } f \text{ tiene en } z_0 \text{ un polo de orden } n_2 - n_1.$$

Ejemplos

Ejemplo 7.4

Estudie el tipo de singularidad que presentan las funciones siguientes en los puntos indicados:

(a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{1 - \cos(z)}$ en 0.

(b) $g(z) = \frac{e^z}{(z - 2)(z - 1)^2}$ en 1 y 2.

Residuos

Definición 7.2

Sea f una función que presenta en z_0 una singularidad aislada. Sabemos que f admite un desarrollo de Laurent en una región del tipo $0 < |z - z_0| < r$ para algún $r > 0$. El coeficiente a_{-1} se llama **residuo** de f en z_0 y se denota por $\text{Res}(f, z_0)$.

Teorema de los residuos

Teorema 7.1

Sea U un subconjunto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y sean $a_1, \dots, a_n$ puntos de U que son singularidades aisladas de una función f analítica en $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Sea σ un arco cerrado simple contenido en U que rodea a los puntos $a_1, \dots, a_n$ y recorrido en sentido positivo. Se verifica entonces que

$$\int_{\sigma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k) \quad (3)$$

Ejemplo

Ejemplo 7.5

Calcule $\int_{C(0,1)} \frac{1 - \cos(z)}{z^3} dz$.

Cálculo de residuos

Proposición 7.2

Sea z_0 un polo de orden $m > 1$ de una función f . Se verifica entonces que

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}} \quad (4)$$

Si z_0 es un polo simple de f , se verifica entonces que

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (5)$$

Ejemplos

Ejemplo 7.6

Calcule el residuo de $\frac{e^z}{1 - \cos(z)}$ en 0.

Ejemplo 7.7

Calcule el residuo de $\frac{e^z - 1}{\sin(z^2)}$ en 0.

Cálculo de residuos

Corolario

Sea z_0 un polo simple de una función f de la forma $f = \frac{g}{h}$ siendo z_0 cero de orden uno de h y $g(z_0) \neq 0$. Se verifica entonces que

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (6)$$

Ejemplos

Ejemplo 7.8

Calcule el residuo de $\frac{e^z}{\operatorname{sen}(z)}$ en 0.

Identificación de coeficientes.

Ejemplo 7.9

Calcule el residuo de $\frac{1}{z - \operatorname{sen}(z)}$ en 0.