

Tema 6

Series de Taylor y de Laurent

Marisa Serrano Ortega
José Ángel Huidobro Rojo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Índice

- 1 Series de Taylor
- 2 Ceros de una función analítica
- 2 Series de Laurent
- 3 Transformada z

Series de Taylor

Teorema 6.1

Sea f función analítica en $D(z_0, R)$. Existe una única sucesión de números complejos $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, tal que, $\forall z \in D(z_0, R)$ se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

Además:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (2)$$

con $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < R$.

Observación

La serie obtenida se denomina desarrollo en **Serie de Taylor** de f en torno al punto z_0 y de ella se deducen importantes consecuencias. Notemos que el radio de convergencia de la serie es el mayor número real positivo R tal que f es analítica en el disco $D(z_0, R)$.

Resultados

Sea $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \overset{\circ}{A}$. La función f es analítica en z_0 si, y sólo si, existe $R > 0$ tal que f es la suma de una serie de potencias en $D(z_0, R)$.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en $z_0 \in \overset{\circ}{A}$, $\rightarrow f$ admite en z_0 derivadas de todo orden. Además, si a_n , $n = 0, 1, \dots$ son los coeficientes del desarrollo de Taylor en $D(z_0, R)$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (3)$$

Desarrollo de la exponencial

Ejemplo 6.1

Obtenga el desarrollo de e^z en torno al cero e indique dónde es válido.

Algunas series

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (4)$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (5)$$

$$\operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (6)$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (7)$$

Ejemplos

Ejemplo 6.2

Hallando las derivadas en el punto 0, obtenga el desarrollo de $\log_0(1+z)$ en $D(0,1)$.

Ejemplo 6.3

Halle el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{1}{z}$ en torno al punto 1 e indique dónde es válido.

Ejemplo 6.4 (Descomposición en fracciones)

Halle el desarrollo de $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ en torno al origen indicando el mayor disco donde es válido.

Ejemplos

Ejemplo 6.5

Derivando el desarrollo de $\frac{1}{z}$ obtenga el desarrollo de $\frac{1}{z^2}$ en torno al punto $z_0 = 1$.

Ejemplo 6.6

Obtenga los tres primeros términos no nulos del desarrollo de $f(z) = \sin^2(z)$ en torno al origen.

Ejemplo 6.7 (Identificación de coeficientes)

Obtenga el desarrollo de $f(z) = \frac{\cos(z)}{e^z}$ en torno al origen.

Ejemplos

Ejemplo 6.8

Obtenga los tres primeros términos no nulos del desarrollo de $\operatorname{tg}(z)$ en torno al origen.

Ejercicio 6.1

Obtenga el desarrollo de $f(z) = \log_0(1+z^2)$ en potencias de z e indique dónde es válido el desarrollo y dónde es analítica la función.

Ceros de una función analítica

Definición 6.1

Sea f una función analítica en un punto z_0 . Se dice que tiene en z_0 un cero de orden n si $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ para $1 \leq k < n$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Ejemplo 6.9

Halle el orden de los ceros de las funciones siguientes: (a) $e^z - 1$ (b) $z^3 - 2z^2$.

Proposición 6.1

Sea f analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ su desarrollo de Taylor. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- a) f tiene en z_0 un cero de orden p .
- b) $a_k = 0$ si $0 \leq k < p$ y $a_p \neq 0$.
- c) Existe una función g analítica en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ y tal que $f(z) = (z - z_0)^p g(z)$.

Además, la función g de la afirmación 3 verifica que

$$g(z_0) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}.$$

Ejemplos

Ejemplo 6.10

Compruebe que $\sin(z^6)$ tiene en $z = 0$ un cero de orden seis.

Ejemplo 6.11

Compruebe que $\log_0(1 + z^2)$ tiene en $z = 0$ un cero de orden dos.

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones analíticas en z_0 y supongamos que z_0 es un cero de orden n de g y un cero de orden $m \geq n$ de f . Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$$

Ejemplo 6.12

Halle $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z}$.

Series de Laurent

Teorema 6.2

Sean $r_1 \geq 0$ y $r_2 > r_1$ y sea f una función analítica en $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Entonces existen unos coeficientes únicos a_n , $n \in \mathbb{Z}$, tales que, si $r_1 < |z - z_0| < r_2$, se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (8)$$

Además, si $r_1 < r < r_2$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad (9)$$

Observaciones

- 1 La convergencia dada en el teorema anterior es uniforme en cualquier corona circular $R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$ con $r_1 < R_1 < R_2 < r_2$.
- 2 Si f es analítica en z_0 el desarrollo de Laurent coincide con el de Taylor.

Ejemplos

Ejemplo 6.13

Halle el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en $|z| > 1$.

Ejemplo 6.14

Halle el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ en potencias de $z - 1$ e indique dónde es válido el desarrollo.

Ejercicios

Ejercicio 6.2

Halle el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ en $|z| > 0$.

Ejercicio 6.3

Halle el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ en: (a) $0 < |z| < 1$, (b) $|z| > 1$.

Ejercicio 6.4

Halle el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ en: (a) $0 < |z - i| < 2$, (b) $|z - i| > 2$.

Transformada z

Definición 6.2

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que la serie de Laurent $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$ converge en una región del tipo $|z| > r \geq 0$. Se

llama **transformada z** de la sucesión a la función $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$.

La función está definida para $|z| > r$ y habitualmente se denota $X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\}$

Ejemplo

Ejemplo 6.15

Determine la transformada z de la sucesión constante $\{x_k = 1\}$, $k = 0, \dots, \infty$.

Ejemplo 6.16

Dado un número complejo a halle la transformada z de la sucesión $\{a^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ejemplo 6.17

Halle la transformada z de la sucesión $\{k\}_{k=0}^{\infty}$. (Puede obtenerse derivando en el ejemplo 15 y se obtiene $\frac{z}{(z-1)^2}$).

Propiedades de la transformada

Proposición 6.2 (Linealidad)

Si $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ son sucesiones que tienen transformada z, y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\mathcal{Z}\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha \mathcal{Z}\{x_k\} + \beta \mathcal{Z}\{y_k\}$$

en el dominio común de definición.

Ejemplos

Ejemplo 6.18

La función tiempo continuo $f(t) = \sin(\omega t)$ con $t \geq 0$, con ω constante es muestreada en pasos de tiempo T para generar la sucesión $\{\sin(k\omega T)\}$. Determine la transformada z de la sucesión.

Ejemplo 6.19

Dada una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ se considera la sucesión $y_0 = 0, y_1 = 0, y_k = x_{k-2}$ para $k \geq 2$. Halle la relación entre las transformadas de $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ y de $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Sucesión retardada

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Dado $k_0 \in \mathbb{N}$, llamaremos **sucesión retardada** de $\{x_k\}$ con retraso $k_0 \in \mathbb{N}$ a la sucesión

$\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida como sigue: $y_k = \begin{cases} 0 & k < k_0 \\ x_{k-k_0} & k \geq k_0 \end{cases}$

En el retraso consideramos que los términos anteriores a x_0 , que tendrían subíndice negativo, son nulos.

Propiedad del retraso

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, y sea $\{y_k\}$ la sucesión retardada con retraso k_0 , entonces, la transformada z de esta sucesión es

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\}$$

Ejemplos

Ejemplo 6.20

Dada la sucesión $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ con $k \geq 0$, determine la transformada z de la sucesión retardada con retraso de $k_0 = 2$.

Ejemplo 6.21

Dada una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ se considera la sucesión $y_0 = x_2$, $y_1 = x_3$, $y_k = x_{k+2}$ para $k \geq 2$. Halle la relación entre las transformadas de $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ y de $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Propiedad del adelanto

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Llamaremos **sucesión adelantada** de $\{x_k\}$ con avance $k_0 \in \mathbb{N}$ a la sucesión $y_k = x_{k+k_0}$ para $k \geq 0$.

Proposición 6.3

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ su adelantada con avance de k_0 , entonces:

$$\mathcal{Z}\{y_k\} = z^{k_0} \mathcal{Z}\{x_k\} - \sum_{k=0}^{k_0-1} x_k z^{k_0-k}$$

Transformada z inversa

Definición 6.3

Sea $X(z)$ una función analítica en una región del tipo $|z| > r$ con $r \geq 0$. Llamaremos **transformada z inversa** a una sucesión $\{x_k\}$ tal que $\mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$. Habitualmente se denota a la transformada z inversa por: $\mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$

Por el teorema del desarrollo en serie de Laurent sabemos que la transformada inversa de la función $X(z)$ existe.

Ejemplos

Ejemplo 6.22

Dada la función $X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)}$, halle en qué dominio admite transformada z inversa y halle su término general.

Ejemplo 6.23

Dada la función $X(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$, determine el dominio en que admite transformada z inversa y halle su término general.

Ejemplos

Ejemplo 6.24

Halle el término general de la sucesión que verifica

$$8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9 \text{ sabiendo que } y_0 = 1 \text{ y que } y_1 = \frac{3}{2}$$