

Tema 5

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Sucesiones y series

Definición 5.1

Sea $\{z_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de números complejos. Se dice que la sucesión converge a $z \in \mathbb{C}$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \rightarrow |z_n - z| < \epsilon$$

En este caso escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Toda sucesión convergente está acotada.

Índice

1 Sucesiones y series

2 Series de potencias

Ejemplos

Ejemplo 5.1

Pruebe que $z_n = \frac{n(1+i)}{n+1}$ converge a $1+i$.

Ejemplo 5.2

Pruebe, usando la definición, que la sucesión $z_n = i^n$ no es convergente.

Ejemplo 5.3

Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n = 0$

Propiedades

Proposición 5.1

Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ que convergen a z y w respectivamente. Se verifican:

- 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w.$
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w.$
- 3 Si $w \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n / w_n = z / w.$

Ejemplo

Demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$$

es convergente, y calcule su suma.

Series

Definición 5.2

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. Si la sucesión $\{s_n\}$ converge hacia s diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente y $s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Serie producto

Proposición 5.2

Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, dos sucesiones tales que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = w$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Si $c_n = \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}$, $n = 0, 1, \dots$, se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = z \cdot w$$

Serie de funciones

Definición 5.3

Sea $A \subset \mathbb{C}$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de funciones y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge a f si, para cada $z \in A$, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z),$$

es decir:

$$\forall z \in A, \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

n_0 depende de z y de ϵ . Es convergencia puntual.

Convergencia uniforme

Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en A si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in A$$

En este caso n_0 no depende de z .

Propiedades

Proposición 5.3

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ y supongamos que las funciones f_n son continuas y que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente hacia f . Entonces f también es función continua en A .

Propiedades

Proposición 5.4

Sea γ una trayectoria C^1 y sea γ^* su imagen. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge a f uniformemente sobre γ^* . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$

Propiedades

Proposición 5.5

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ una serie de números reales con $M_n \geq 0$. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in A$. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A .

Series de potencias

Llamaremos serie de potencias a la serie de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$$

donde a_n y c son números complejos.

Ejemplos de series de potencias son:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n} (z-1)^n$$

Radio de convergencia

$\{a_n\}$ sucesión de números complejos, $c \in \mathbb{C}$. Una de las siguientes afirmaciones es cierta

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ converge absolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$

② $\exists R \geq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ converge absolutamente si $|z - c| < R$ y diverge si $|z - c| > R$.

R es el **radio de convergencia** de la serie y

$0 \leq r < R \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ converge uniformemente en $\overline{D}(c, r)$.

Consecuencias

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$. Entonces

la función suma $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ es continua en $D(c, R)$.

Consecuencias

Dado $r > 0$ supongamos que si $|z - c| < r$,

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n \text{ y } b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - c)^n$$

$$\text{y sea } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Se verifica entonces que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - c)^n = a(z) \cdot b(z), \text{ si } |z - c| < r.$$

Propiedad

Sea a_n una sucesión de números complejos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = r$. Entonces, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ es $1/r$, si $r \neq 0$, y $+\infty$, si $r = 0$.

Propiedad

Sea a_n una sucesión de números complejos tal que $a_n \neq 0$ al menos a partir de un cierto índice. Supongamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$.

Entonces, el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ es $1/r$, si $r \neq 0$, y $+\infty$, si $r = 0$.

Ejemplos

Ejemplo 5.4

Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y pruebe que su suma es $\frac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$.

Ejemplo 5.5

Halle el radio de convergencia y la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+i}\right)^n$.

Ejemplos

Ejemplo 5.6

Halle el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Ejemplo 5.7

Utilizando el ejemplo 4, exprese la función $\frac{1}{(1-z)^2}$ como suma de una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para $z \in D(0, 1)$.

Derivación e integración

Teorema 5.1

(Derivación término a término) Sea una serie de potencias de radio de convergencia R y sea f la función suma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$. Entonces f es analítica en $D(c, R)$ y su derivada es otra serie de potencias cuyo radio también es R y que puede calcularse derivando término a término:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \quad (1)$$

Ejercicios

Ejercicio 5.1

Halle los coeficientes a_n de una serie de potencias tal que $\frac{1}{2z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y calcule el radio de convergencia.

Ejercicio 5.2

Halle los coeficientes a_n de una serie de potencias tal que $\frac{1}{2z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$ y calcule el radio de convergencia.

Consecuencia

Corolario

Sea f la suma de una serie de potencias centrada en un punto c y sea $R \geq 0$ su radio de convergencia. Entonces f tiene derivadas de todo orden en $D(c, R)$. Además, los coeficientes verifican

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Si f puede expresarse como suma de una serie de potencias en torno a un punto c , los coeficientes de la serie son únicos.

Ejemplos

Ejemplo 5.8

Halle la derivada de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Ejemplo 5.9

Halle el radio de convergencia y la derivada de

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Propiedad

Para $z \in D(c, R)$, sea $f(z)$ la suma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

y sea F una primitiva de f . Entonces, en la bola $D(c, R)$, F puede desarrollarse como

$$F(z) = F(c) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{(z - c)^n}{n}$$

Ejemplos

Ejemplo 5.10

Halle una serie de potencias cuya derivada sea $f(z) = \frac{1}{(1+z)}$ en $D(0, 1)$.

Ejercicio 5.3

Integrando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ pruebe que, si $|z| < 1$,

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots$$

Ejercicio 5.4

Calcule una serie en potencias de z cuya suma sea $\log_{4\pi}(1+z)$