

Tema 4: Integración en el plano complejo

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Índice

- 1 Trayectorias
- 2 Integración
- 3 Teorema y fórmula de Cauchy

Trayectorias (I)

Definición 4.1

Se llama **trayectoria** a una aplicación $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua.

Habitualmente se denota por σ^* al conjunto imagen $\sigma([a, b])$.
Los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ son, respectivamente, el origen y el final de la trayectoria y, si coinciden, se dice que la trayectoria es **cerrada**.

Trayectorias (II)

Definición 4.2

Una trayectoria se dice que es de clase C^k si lo es la aplicación σ (En los extremos del intervalo se entiende que las derivadas son laterales).

Definición 4.3

Una trayectoria se dice que es **regular** o suave si la aplicación σ tiene derivada continua y ésta no se anula.

Si la aplicación σ es inyectiva la trayectoria se dice **simple** o de **Jordan**. En el caso de una trayectoria cerrada, se dice que es simple si es inyectiva salvo en los extremos.

Trayectorias (III)

Dado $r > 0$ y $a \in \mathbb{C}$, la trayectoria $\sigma(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ representa la circunferencia de centro en a y de radio r . Son trayectorias cerradas de Jordan y suelen denotarse como $C(a, r)$.

Contorno

En general, entenderemos por **arco** o **contorno** a la yuxtaposición de un número finito de trayectorias simples que sean, al menos, C^1 .

Ejemplos

Ejemplo 4.1

Dados dos puntos z y w , $\sigma(t) = z + t(w - z)$, con $t \in [0, 1]$, es una trayectoria regular cuya imagen es el segmento que une z con w .

Ejemplo 4.2

Dado $r > 0$, $\sigma(t) = re^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$ es una trayectoria regular cuya imagen es $C(0, r)$ y está recorrida en sentido positivo.

Ejemplo 4.3

El conjunto imagen de la trayectoria $\sigma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, con $t \in [-1, 1]$ es la semicircunferencia centrada en el origen de radio 1 situada en el semiplano $y > 0$. No es una trayectoria C^1 .

Trayectorias equivalentes

Definición 4.4

Dos trayectorias $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que son equivalentes si existe una aplicación biyectiva $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ derivable con derivada no nula tal que $\sigma = \beta \circ h$.

Si la h es creciente ambas trayectorias tienen el mismo sentido de recorrido y si es decreciente, los sentidos de recorrido son opuestos.

Definición 4.5

Dada una trayectoria $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se define la **longitud** como

$$\text{long}(\sigma) = \int_a^b |\sigma'(t)| dt$$

Integración

Definición 4.6

Sea $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una trayectoria y f una función continua definida sobre el conjunto imagen, $\sigma^* f : \sigma^* \rightarrow \mathbb{C}$. Se define la integral de f sobre σ como

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_a^b f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt.$$

En el caso de yuxtaposición de arcos se hace la suma.

Ejemplos

Ejemplo 4.4

Calcule $\int_{\sigma} f(z) dz$ en los casos siguientes:

(a) $f(z) = z$, $\sigma(t) = t(1 + i)$, $t \in [0, 1]$.

(b) $f(z) = z^3$, $\sigma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

(c) $f(z) = \bar{z}$

$\sigma(t) = \begin{cases} e^{it} & \text{si } t \in [0, \pi/2], \\ (1 + \pi/2 - t)i & \text{si } t \in [\pi/2, 1 + \pi/2]. \end{cases}$

Propiedades

De las propiedades de la integración se deduce que la integral curvilínea es lineal.

Proposición 4.1

Sea σ una trayectoria y f una función continua definida sobre el conjunto imagen σ^* , $f : \sigma^* \rightarrow \mathbb{C}$. Sean $u = \text{Real}(f)$ y $v = \text{Imag}(f)$. Se verifica entonces

$$\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{\sigma} (u, -v) \cdot d\vec{r} + i \int_{\sigma} (v, u) \cdot d\vec{r}.$$

Propiedades (II)

Proposición 4.2

Sean σ y β dos trayectorias equivalentes y f una función continua definida sobre el conjunto imagen de ambas. Se verifica entonces:

(a) Si σ y β mismo sentido, $\int_{\sigma} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz$.

(b) Si σ y β sentidos opuestos, $\int_{\sigma} f(z) dz = - \int_{\beta} f(z) dz$.

Propiedades (III)

Proposición 4.3

Sea σ una trayectoria y f una función continua definida sobre el conjunto imagen y tal que $|f(z)| \leq M \forall z \in \sigma^*$. Se verifica entonces que

$$\left| \int_{\sigma} f(z) dz \right| \leq M \cdot \text{long}(\sigma).$$

Propiedades (V)

Ejemplo 4.5

Calcule $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

Propiedades (IV)

Proposición 4.4

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y σ una trayectoria cuya imagen está en U con origen en A y final en B . Sea $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en U que es la primitiva de una función f . Se verifica entonces que

$$\int_{\sigma} f(z) dz = F(B) - F(A).$$

La integral no depende del camino.

Corolario

En las hipótesis de la proposición anterior, si la trayectoria σ es cerrada, entonces la integral curvilínea es nula.

Teorema y fórmula de Cauchy

Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ simplemente conexo y f una función analítica en U . Sea σ una trayectoria cerrada de Jordan. Se tiene entonces que si $z \in U$ es rodeado por σ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw. \quad (1)$$

También se verifica una fórmula similar para las derivadas

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (2)$$

Ejemplos

Ejemplo 4.6

Aplicando la fórmula de Cauchy calcule:

$$(a) \int_{C(0,2)} \frac{1}{z-1} dz, (b) \int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz.$$

Ejemplo 4.7

Aplicando la fórmula de Cauchy calcule:

$$(a) \int_{C(0,3)} \frac{e^{iz\pi}}{z-2} dz, (b) \int_{C(0,3)} \frac{e^{iz\pi}}{(z-2)^2} dz$$