

Tema 3: Funciones elementales

Marisa Serrano,
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

15 de octubre de 2009

email: mlserrano@uniovi.es
email: jahuidobro@uniovi.es

Índice

- 1 Función exponencial
- 2 El logaritmo complejo
- 3 Funciones trigonométricas
- 4 Funciones hiperbólicas
- 5 Exponenciación y potenciación en $\mathbb{C}$

Función exponencial

Definición 3.1

Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se define la función exponencial compleja como

$$\exp(z) = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

$|\exp(z)| = e^x$ y que y es un argumento de $\exp(z)$.

Si $z = 0 + iy$, con $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$.

Extiende a la exponencial real: si $z = x + 0i$, entonces $e^z = e^x$.

Además $\exp'(z) = \exp(z)$

Ejemplos

Ejemplo 3.1

Expresa en forma binómica $e^{i\pi}$, $e^{2+i\pi/2}$ y $e^{i\pi/4}$.

Ejemplo 3.2

Expresa en la forma e^{x+iy} los números complejos 2 , $2i$, -3 , $-2i$.

Ejemplo 3.3

Halle la imagen de la recta $y = \pi/4$ mediante la función exponencial.

Ejemplo 3.4

Halle la imagen de la recta $x = 1$ mediante la función exponencial.

Ejercicios

Ejercicio 3.1

Razone que si $w \neq 0$ siempre existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$.

Ejercicio 3.2

Dado $b \in \mathbb{R}$, halle la imagen de la recta $y = b$ mediante la función exponencial.

Ejercicio 3.3

Dado $a \in \mathbb{R}$, halle la imagen de la recta $x = a$ mediante la función exponencial.

Propiedades

Proposición 3.1

Se verifica

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Corolario 3.1

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se verifica:

- a) $\exp(z) \neq 0$,
- b) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$
- c) $(\exp(z))^n = \exp(nz)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Corolario 3.2

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1} = e^{z_2} \leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi i \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos

Ejemplo 3.5

Halle las soluciones de $e^z = 1 + i$.

Ejercicio 3.4

Demuestre que la función exponencial es inyectiva si se restringe el conjunto de partida al conjunto $A_0 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Halle el conjunto imagen.

El logaritmo complejo

Dado $w \in \mathbb{C}$ soluciones de $\exp(z) = w$

Si $w = \rho e^{i\theta} \neq 0$, $z = \ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$.

Definición 3.2

Sea $w \neq 0$, se dice que z es un logaritmo de w si $\exp(z) = w$. Si $|w| = \rho$ y θ es un argumento de w , los logaritmos de w son

$$\log(w) = \{\ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $\arg$ en $(-\pi, \pi]$, **logaritmo principal**.

Ejemplos

Ejemplo 3.6

Calcule los logaritmos de (a) $1 + i$, (b) 1 , (c) -1 , (d) i .

Ejercicio 3.5

Halle las soluciones de la ecuación $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ que pertenecen al conjunto $A_0 = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$.

$\log_\alpha$

Definición 3.3

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama $\log_\alpha$ a la inversa de la función

$$\exp : (-\infty, \infty) \times (\alpha - \pi, \alpha + \pi) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus H_\alpha$$

Se tiene $\log_\alpha : \mathbb{C} \setminus H_\alpha \longrightarrow (-\infty, \infty) \times (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$

$$\log_\alpha(z) = \ln |z| + i \arg_\alpha(z) \quad (1)$$

$\log_\alpha(z) \in \log(z) \rightarrow e^{\log_\alpha(z)} = z \ \forall z \in \mathbb{C} - H_\alpha$. También, si $z \in A_\alpha = (-\infty, \infty) \times (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$, entonces $\log_\alpha(\exp(z)) = z$. La igualdad no se cumple si $z \notin A_\alpha$.

$\arg_\alpha$

El logaritmo es una función multívoca.

Para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\exp : (-\infty, \infty) \times (\alpha - \pi, \alpha + \pi) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus H_\alpha$$

es biyectiva. La inversa $\log_\alpha$.

De todos los argumentos se elige

$$\arg_\alpha : \mathbb{C} \setminus H_\alpha \longrightarrow (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$$

Derivada del logaritmo

Proposición 3.2

La función $\log_\alpha : \mathbb{C} \setminus H_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en su dominio de definición y su derivada es

$$\frac{d \log_\alpha(z)}{dz} = \frac{1}{z}.$$

Ejemplos

Ejemplo 3.7

Calcule: $\log_{\pi}(-1)$, $\log_{3\pi}(-1)$, $\log_0(1)$, $\log_{2\pi}(-1)$.

Ejemplo 3.8

Halle el dominio de definición de $f(z) = \log_0(z^2)$ y calcule su derivada.

Ejercicios

Ejercicio 3.9

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus H_{\alpha}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ ¿se cumple $\log_{\alpha}(z^n) = n \log_{\alpha}(z)$?

Ejercicio 3.10

Halle el dominio de definición de $f(z) = \log_0(1 - z)$ y calcule su derivada.

Ejercicios

Ejercicio 3.6

Estudie si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ es cierto que $\log_{\alpha}(e^{1+i\frac{3\pi}{2}}) = 1 + i\frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 3.7

Estudie si $\log_0$ puede extenderse como función continua a los puntos del semieje real negativo.

Ejercicio 3.8

$\alpha \in \mathbb{R}$, ¿ $\forall z, w \in \mathbb{C} \setminus H_{\alpha}$ se cumple $\log_{\alpha}(z \cdot w) = \log_{\alpha}(z) + \log_{\alpha}(w)$?

Funciones trigonométricas

Dado $t \in \mathbb{R}$ se tienen las expresiones

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t) \quad (2)$$

$$e^{-it} = \cos(t) - i \sin(t) \quad (3)$$

Sumando y restando se obtiene

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

Seno y coseno complejo

Definición 3.4

Para $z \in \mathbb{C}$ se definen

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{cos}(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Extienden al sen y al cos del caso real.

Derivadas

Proposición 3.3

Las funciones sen y cos son enteras y sus derivadas son:

$$\frac{d \operatorname{sen}(z)}{dz} = \operatorname{cos}(z) \quad \text{y} \quad \frac{d \operatorname{cos}(z)}{dz} = -\operatorname{sen}(z).$$

Propiedades

Proposición 3.4

Se verifican las siguientes propiedades:

- $\operatorname{sen}(z)$ y $\operatorname{cos}(z)$ son periódicas de periodo 2π .
- $e^{iz} = \operatorname{cos}(z) + i \operatorname{sen}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$ y $\operatorname{cos}(z) = \operatorname{cos}(-z)$.
- $\operatorname{sen}^2(z) + \operatorname{cos}^2(z) = 1$.
- $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1) \operatorname{cos}(z_2) + \operatorname{sen}(z_2) \operatorname{cos}(z_1)$.
- $\operatorname{cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{cos}(z_1) \operatorname{cos}(z_2) - \operatorname{sen}(z_1) \operatorname{sen}(z_2)$.

Ceros del seno y el coseno

Proposición 3.5

Se verifica que:

- $\operatorname{sen}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{cos}(z) = 0$ si, y sólo si, $z = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos

Ejemplo 3.9

Halle las soluciones de $\operatorname{sen}(z) = 2$.

Ejercicio 3.11

Halle las soluciones de la ecuación $\cos(z^2) = 0$.

Ejemplo 3.10

Demuestre que $\operatorname{sen}(z)$ no está acotada cuando $z \in \mathbb{C}$.

Derivadas

Proposición 3.6

Las funciones senh y $\cosh$ son enteras y sus derivadas son:

$$\frac{d \operatorname{senh}(z)}{dz} = \cosh(z) \quad \text{y} \quad \frac{d \cosh(z)}{dz} = \operatorname{senh}(z)$$

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen como las reales.

Definición 3.5

Para $z \in \mathbb{C}$ se definen

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Extienden a las funciones senh y $\cosh$ reales.

Propiedades

Proposición 3.7

Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifican

- a) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$,
- b) $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh}(z_1) \cosh(z_2) + \cosh(z_1) \operatorname{senh}(z_2)$,
- c) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1) \cosh(z_2) + \operatorname{senh}(z_1) \operatorname{senh}(z_2)$.

Ejercicios

Ejercicio 3.12

Verifique la relaciones: $\sinh(iz) = i \cosh(z)$ y $\cosh(iz) = i \sinh(z)$.

Ejercicio 3.13

Halle los ceros de $\sinh(z)$ y $\cosh(z)$.

Exponenciación y potenciación en $\mathbb{C}$

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $x^y = e^{y \ln(x)}$
 Se utiliza el logaritmo para definir z^w .

Definición 3.6

Para $z \neq 0$ se define

$$z^w = e^{w \log(z)}$$

Ejemplos

Ejemplo 3.11

Halle i^i , 1^i , i^π .

Ejemplo 3.12

Halle $e^{1/2}$ y verifique que no coincide con $\exp(1/2)$.

Ejercicio 3.14

Estudie si es cierto que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ y $\forall z \neq 0$ se cumple que $z^{m/n}$ coincide con $\sqrt[n]{z^m}$.

Potencias

Definición 3.7

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{C}$. Para $z \in \mathbb{C} \setminus H_\alpha$ se define la potencia w de z como

$$p_\alpha^w(z) = e^{w \log_\alpha(z)}$$

Proposición 3.8

La función $p_\alpha^w(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus H_\alpha$ y su derivada es $\frac{w}{z} p_\alpha^{w-1}(z)$.

Ejercicio

Ejercicio 3.15

Sea $f(z) = p_0^{1/3}(z)$.

- 1 Calcule su dominio de definición A y el conjunto imagen $B = f(A)$.
- 2 Sea $g(z) = z^3$. Estudie si es cierto que $g(f(z)) = z \ \forall z \in A$.
- 3 Estudie si es cierto que $f(g(z)) = z \ \forall z \in B$. ¿Y para todo $z \in \mathbb{C}$?