

Tema 2: Funciones analíticas

Marisa Serrano

Universidad de Oviedo

6 de octubre de 2009

email: mlserrano@uniovi.es

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

$$B(a, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \epsilon\} = D(a, \epsilon).$$

Dado $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice que un punto $a \in \mathbb{C}$ es **interior** a A si existe un $\epsilon > 0$ tal que $D(a, \epsilon) \subset A$.

Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ se dice que es **abierto** si todos sus puntos son interiores.

Un subconjunto A se dice que es **cerrado** si su complementario $\mathbb{C} \setminus A = \{z \in \mathbb{C} : z \notin A\}$ es abierto.

Índice

- 1 Límites y continuidad
- 2 Derivación
- 3 Condiciones de Cauchy-Riemann
- 4 Funciones armónicas

Ejemplos

Ejemplo 2.1

El conjunto $D(0, 1)$ es abierto. Cualquier bola abierta es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.2

Los conjuntos $\overline{D(a, \epsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq \epsilon\}$ son cerrados.

Ejemplo 2.3

Los conjuntos $\mathbb{C}$ y $\emptyset$ son simultáneamente abiertos y cerrados.

Ejemplo 2.4

Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados como, por ejemplo, $A = \{z = x + yi \in \mathbb{C} : x \geq 0, y > 0\}$.

Punto de acumulación

$a \in \mathbb{C}$ es **punto de acumulación** de $A \subset \mathbb{C}$ si para cada $\epsilon > 0$ se verifica que $D(a, \epsilon) \cap A$ contiene puntos distintos de a .

Nota

Si a es un punto de acumulación de A , entonces $D(a, \epsilon) \cap A$ contiene infinitos puntos.

Límites

Definición 2.1

Sea $A \subset \mathbb{C}$, a un punto de acumulación de A y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Se dice que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |z - a| < \delta \wedge z \in A \rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$

Ejemplos

Ejemplo 2.5

El punto $a = 0$ es el único punto de acumulación del conjunto $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 2.6

El conjunto de todos los puntos de acumulación del disco abierto $D(0, 1)$ es el disco cerrado $\overline{D(0, 1)}$.

Ejemplos

Ejemplo 2.7

Demuestre que $\lim_{z \rightarrow 1} (z + i) = 1 + i$.

Ejemplo 2.8

Demuestre que $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z - 1)}$ no existe.

Ejemplo 2.9

Demuestre que $\lim_{z \rightarrow -1} \arg_0(z)$ no existe.

Parte real y parte imaginaria de una función compleja

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = l \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (\text{Real}(a), \text{Imag}(a))} \text{Real}(f(x,y)) = \text{Real}(l) \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (\text{Real}(a), \text{Imag}(a))} \text{Imag}(f(x,y)) = \text{Imag}(l). \end{cases}$$

Propiedades del límite

Proposición 2.1

Sea $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ y a un punto de acumulación de A . Supongamos que $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = l$ y $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = h$.

Entonces

- 1 $\lim_{z \rightarrow a} (f + g)(z) = l + h$,
- 2 $\lim_{z \rightarrow a} (f \cdot g)(z) = l \cdot h$,
- 3 $\lim_{z \rightarrow a} (c \cdot f)(z) = c \cdot l \quad \forall c \in \mathbb{C}$,
- 4 $\lim_{z \rightarrow a} (f/g)(z) = l/h$, si $h \neq 0$.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{C}$, a un punto de acumulación de A que además pertenece a A y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es **continua** en a si

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

La función f se dice que es continua en A si lo es en todos los puntos de A .

De la proposición anterior se deduce que si f y g son continuas en un punto a entonces $f + g$, $f \cdot g$ y f/g , si $g(a) \neq 0$, son continuas en el punto a .

Ejemplos

Ejemplo 2.10

Las funciones constantes, la identidad y las funciones polinómicas son funciones continuas.

Ejemplo 2.11

Demuestre que $f(z) = \text{Real}(z)$ es continua en todo $\mathbb{C}$.

Propiedad

Proposición 2.2

Sean A subconjunto de $\mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A) \subset B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $a \in A$ punto de acumulación de A y $b = f(a) \in B$ punto de acumulación de B . Si f es continua en a y g lo es en b , se verifica entonces que la función compuesta $g \circ f$ es continua en a .

Derivación

Definición 2.2

Sea $A \subset \mathbb{C}$, a un punto interior a A y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es derivable en el punto a si existe $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$. El valor del límite se denomina **derivada** de f en el punto a y suelen emplearse las notaciones $f'(a)$, $\frac{df(a)}{dz}$ o $\left(\frac{df}{dz}\right)_a$.

Ejemplos

Ejemplo 2.12

Si $f(z) = k$, con $k \in \mathbb{C}$, f es derivable en todos los puntos de $\mathbb{C}$ y su derivada es la función nula.

Ejemplo 2.13

Sea $f(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f'(a) = 1 \forall a \in \mathbb{C}$.

Propiedades

Proposición 2.3

Sea $A \subset \mathbb{C}$, $a \in \overset{\circ}{A}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Si f es derivable en a entonces f es continua en a .

Proposición 2.4

Sea $A \subset \mathbb{C}$, $a \in \overset{\circ}{A}$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en a se tiene que $f + g$ y $f \cdot g$ son derivables en a y se verifica

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Si además $g(a) \neq 0$, entonces f/g es derivable en a y

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$$

Propiedades

Los polinomios de variable compleja son funciones derivables y su derivada se calcula como en el caso real.

Proposición 2.5

(Regla de la cadena). Sean A subconjunto de $\mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f(A) \subset B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $a \in \overset{\circ}{A}$ y $b = f(a) \in \overset{\circ}{B}$. Si f es derivable en a y g lo es en b se tiene que la función compuesta $g \circ f$ es derivable en a y se verifica que

$$(g \circ f)(a)' = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ejemplo

Ejemplo 2.14

Aplicando la regla de la cadena, obtenga la derivada de $h(z) = (z^3 + z + 1)^{24}$.

Derivada de la función inversa

Proposición 2.6

Sean A y B subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, $f : A \rightarrow B$ biyectiva y $g : B \rightarrow A$ su función inversa. Sea $a \in A$ y $b = f(a) \in B$ y supongamos que f es derivable en a con $f'(a) \neq 0$ y que g es continua en b . Se tiene entonces que g es derivable en b y se verifica que

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Condiciones de Cauchy-Riemann

Teorema 2.1

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ y sean $u = \text{Real}(f)$ y $v = \text{Imag}(f)$. La función f es derivable en $a + ib \in \overset{\circ}{A}$ si, y solamente si, u y v son diferenciables en (a, b) y verifican las ecuaciones

$$u_x(a, b) = v_y(a, b) \quad (1)$$

$$u_y(a, b) = -v_x(a, b) \quad (2)$$

Se verifica además que

$$f'(a + ib) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = v_y(a, b) - iu_y(a, b)$$

Corolario

Si las funciones u y v tienen derivadas parciales en una bola centrada en (a, b) , son continuas en (a, b) y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann entonces f es derivable en $a + bi$. El resultado recíproco no es cierto.

Ejemplo 2.15

Estudie en qué puntos son derivables las funciones siguientes y halle la derivada:

(a) $f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$.

(b) $g(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$.

(c) $h(x + iy) = 2xy + i(x^2 + y^2)$.

Ejercicios

Ejercicio 2.1

Estudie dónde son derivables las funciones siguientes y calcule la derivada: (a) $f(z) = |z|$, (b) $h(z) = \bar{z}$.

Función analítica

Definición 2.3

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$. Se dice que una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ es **analítica** en a si f es derivable en un entorno de a . También se utiliza el término **holomorfa**. Se dice que f es analítica en A si lo es en todos los puntos de A .

Una función que es analítica en todo $\mathbb{C}$ se dice que es **entera**.

Proposición

Proposición 2.7

Sea A un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en A y tal que $f'(z) = 0 \forall z \in A$. Entonces f es constante en A .

Ejercicios

Ejercicio 2.2

¿Dónde son analíticas las funciones siguientes?. Calcule la derivada: $f(x + yi) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$,
 $h(x + yi) = xy + i(y^2 - x^2/2)$.

Ejercicio 2.3

Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en A .
 $\text{Real}(f) = 0 \rightarrow f$ constante.

Ejercicios

Ejercicio 2.4

Condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

$$u_\rho(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} v_\theta$$

$$\frac{1}{\rho} u_\theta(\rho, \theta) = -v_\rho$$

Ejercicio 2.5

Estudie dónde son analíticas las funciones, expresadas en polares,
 $f(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) + i\rho \sin(\theta)$ y $g(\rho, \theta) = \rho^4 \sin(4\theta) - i\rho^4 \cos(4\theta)$.

Funciones armónicas

Definición 2.4

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u \in \mathcal{C}^2(A)$. Se dice que u es armónica si verifica la ecuación de Laplace:

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in A \quad (3)$$

Si

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y),$$

la ecuación se escribe

$$\Delta(u) = 0, \quad \forall (x, y) \in A$$

Ejemplo

Ejemplo 2.16

Compruebe que $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ son armónicas.

Proposiciones

Proposición 2.8

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. Sean $u = \text{Real}(f)$ y $v = \text{Imag}(f)$ y supongamos que son $\mathcal{C}^2$ en A . Si f es analítica en A entonces u y v son armónicas.

Exigir que u y v sean $\mathcal{C}^2$ en A es una hipótesis innecesaria.

Ejercicios

Ejercicio 2.6

Estudie si $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, es armónica.

Ejercicio 2.7

Halle, si existe, una función $v(x, y)$ tal que $f(x + yi) = 2xy + v(x, y)i$ sea entera y $f(0, 0) = i$.

Armónica conjugada

Proposición 2.9

Sea A un subconjunto abierto simplemente conexo de $\mathbb{C}$ y $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}^2(A)$. Si u es armónica en A entonces existe $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es analítica en A . La función v se dice que es una **armónica conjugada** de u .

Ejemplo 2.17

Pruebe que $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ es armónica y halle una armónica conjugada. (Solución: $x^3 - 3y^2x + C$ con $C \in \mathbb{R}$).