

Tema 1: El cuerpo de los números complejos

Marisa Serrano
José Ángel Huidobro

Universidad de Oviedo

6 de octubre de 2008

email: mlserrano@uniovi.es
jahuidobro@uniovi.es

Nota histórica

En 1545, Cardano, en su obra *Ars Magna* plantea y resuelve el problema de buscar dos números cuya suma sea 10 y cuyo producto sea 40. La ecuación resultante es $x(10 - x) = 40$ (solución $5 + \sqrt{-15}$, $5 - \sqrt{-15}$)

En 1777 Euler introduce i para $\sqrt{-1}$ y plantea la ecuación que relaciona los números más importantes

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

A principios del siglo XIX, Argand representó los números complejos en el plano y en 1827, Gauss los escribió en la forma (a, b) , en 1835 Hamilton opera con ellos sin utilizar i ni $\sqrt{-1}$

El cuerpo de los números complejos

Definición 1.1

Se considera el conjunto $\mathbb{R}^2$ y en él se definen dos leyes de composición interna suma y producto como sigue

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

Se denota por $\mathbb{C}$ el conjunto $\mathbb{R}^2$ cuando le consideramos dotado de estas dos operaciones.

Teorema 1.1

El conjunto $\mathbb{C}$ con las operaciones anteriores verifica las propiedades siguientes:

- 1 $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo.
- 2 $(\mathbb{C} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo.
- 3 Distributiva:
 $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$

Por lo tanto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.

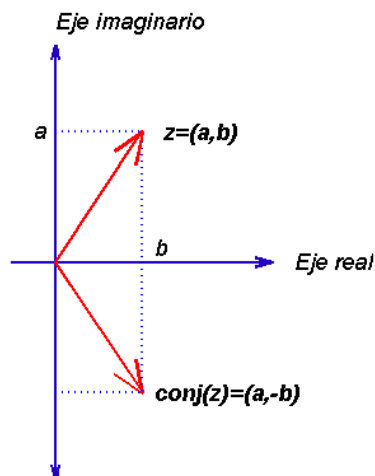
Existe un isomorfismo entre el cuerpo $\mathbb{R}$ y el subcuerpo de $\mathbb{C}$ formado por los complejos de la forma $(a, 0)$.
 Dado que $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$, llamando $i = (0, 1)$ se suele escribir $(a, b) = a + bi$

Definiciones

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **parte real** de z a $Real(z) = a$ y **parte imaginaria** de z a $Imag(z) = b$.

El eje de abscisas se llama **eje real** y el de ordenadas **eje imaginario**.

Se llama **conjugado** de z a $\bar{z} = a - bi$, y es el simétrico de z respecto del eje real.



Propiedades de la conjugación

Proposición 1.1

Para cualesquiera z, z_1 y z_2 elementos de $\mathbb{C}$ se verifica que:

- 1 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$
- 2 $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$
- 3 $\overline{\bar{z}} = z$

Ejercicios

Ejemplo 1.1

Halle la parte real y la parte imaginaria de $(1 - 2i)(1 - i)$.

Ejemplo 1.2

Expresa en forma binómica el complejo: $\frac{5 - i}{1 - i}$

Ejercicios

Ejercicio 1.4

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. ¿Son ciertas las relaciones?

- a) $\text{Real}(z \cdot w) = \text{Real}(z) \cdot \text{Real}(w)$,
- b) $\text{Real}(z \cdot i) = -\text{Imag}(z)$,
- c) $\text{Imag}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\text{Imag}(z)}{\text{Imag}(w)}$ con $\text{Imag}(w) \neq 0$.

Ejercicio 1.5

Represente los conjuntos siguientes:

- a) $\{z \in \mathbb{C} / \text{Real}(z) > 1\}$
- b) $\{z \in \mathbb{C} / \text{Imag}(z) < 1\}$
- c) $\{z \in \mathbb{C} / \text{Real}(z) = 2\}$

Ejercicio 1.1

Expresa en la forma $a + ib$:

- $(1 + i)(2 - i)$,
- $\frac{1 - i}{2 + i}$,
- $\frac{1 + i}{1 - i}$

Ejercicio 1.2

Si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, halle la parte real y la parte imaginaria de $\frac{1 + z}{1 - z}$, ($z \neq 1$).

Ejercicio 1.3

Si $z = x + iy$ halle:

$\text{Real}(z^2)$, $\text{Imag}(z^2)$, $\text{Real}(z \cdot i)$, $\text{Imag}(z \cdot i)$

Módulo

Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se llama **módulo** de z a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposición 1.2

Sean z_1 y z_2 elementos de $\mathbb{C}$, se verifica que:

- 1 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- 2 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$
- 3 $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$
- 4 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (desigualdad triangular).

Ejemplos

Ejemplo 1.3

Represente gráficamente y halle el módulo de:

- a) $2 + i$,
- b) 2 ,
- c) $3i$

Ejemplo 1.4

Represente en el plano complejo los conjuntos:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$,
- b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\}$,
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1\}$.

Forma módulo-argumento

Forma polar $z = r \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r_{\angle \theta}$

Forma de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$

Si $|z| = r$ y θ es un argumento de z se puede escribir

$$z = r \cdot e^{i\theta} = r_{\theta} = r_{\angle \theta}$$

Ejemplo 1.5

Expresa en forma polar y represente en el plano los números complejos

- a) $1 - i$, b) -1 , c) $-i$, d) $1 + \sqrt{3}i$

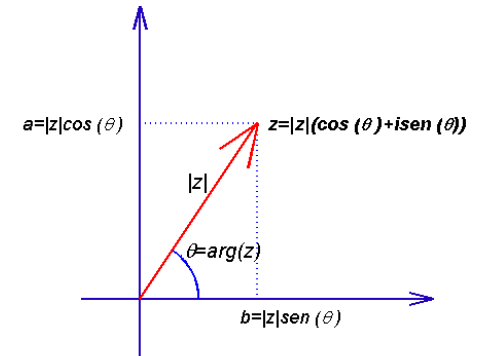
Argumento

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ es un **argumento** de z si

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)).$$

Si r es el módulo de un número complejo z y θ es un argumento se tiene

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$$



Argumentos

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))\}$$

De todos los elementos de $\arg(z)$, el único que pertenece a $(-\pi, \pi]$ es al que llamaremos argumento principal.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, llamaremos $\arg_{\alpha}(z)$ a la función que a un número complejo z le asocia el único argumento de z que pertenece al intervalo $(\alpha - \pi, \alpha + \pi)$.

Ejemplo 1.6

Halle:

- a) $\arg_0(2)$ b) $\arg_0(i)$ c) $\arg_{\pi}(-1)$ d) $\arg_{3\pi}(2)$.

El cociente de complejos en forma módulo-argumento

Proposición 1.3

Sean $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ dos números complejos. Se verifica entonces que $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. Si además $z_2 \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Como consecuencia se tiene que si $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$, entonces $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

Ejemplos

Ejemplo 1.7

Usando la forma polar calcule:

a) $(1 + i)^2$

b) $\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$

Ejemplo 1.8

Obtenga las coordenadas de los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen con uno de sus vértices en el punto $(1, 0)$.

Ejemplos

Ejemplo 1.9

Sea T el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$. Halle las coordenadas del triángulo obtenido aplicar a T un giro centrado en el origen de ángulo $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario.

Ejemplo 1.10

Halle la imagen del conjunto $A = \{z = r_{|\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi/4\}$ mediante la aplicación $f(z) = 2z^2 + i$.

Ejercicios

Ejercicio 1.6

Expresa en forma polar:

a) i , b) $-i$, c) $-\sqrt{3} + i$, d) $-2 - 2i$.

Ejercicio 1.7

Usando la forma polar calcule:

a) $(\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}i)$, c) $\frac{-\sqrt{3} + i}{2 + 2\sqrt{3}i}$.
b) $(1 - i)^2$,

Ejercicio 1.8

Pruebe que $\rho_{|\theta} = r_{|\phi}$ si, y sólo si, $\rho = r$ y $\theta = \phi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicios

Ejercicio 1.9

Pruebe que $\forall z, w \in \mathbb{C}$ se verifica $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Ejercicio 1.10

Halle la imagen del conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Imag}(z) > 0\}$ mediante la aplicación $f(z) = 2z^2$.

Ejercicio 1.11

Halle una función f que transforme el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1, \operatorname{Real}(z) \leq 1\}$ en $B = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$.

Potencias

Proposición 1.4

Sea $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, se verifica entonces que $z^m = r^m \cdot e^{im\theta}$.

Fórmula de Möivre:

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

Ejemplos de potencias

Ejemplo 1.11

Calcule:

- a) $(1 + i)^3$
- b) $(1 + \sqrt{3}i)^4$
- c) $(1 - \sqrt{3}i)^2$
- d) i^3
- e) i^4

Ejercicio

Ejercicio 1.12

Calcule:

- (a) $(1 + i)^9$
- (b) $(-1 + i)^{17}$
- (c) $(1 - \sqrt{3}i)^{15}$
- (d) i^{1023}

Raíces n-ésimas de un complejo

Proposición 1.5

Sean $z = r \cdot e^{i\theta} \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$; se verifica que z tiene exactamente n raíces n -ésimas distintas que son

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \text{ para } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Ejemplos

Ejemplo 1.12

Halle y represente gráficamente las raíces siguientes: (a) $\sqrt[4]{i}$, (b) $\sqrt[3]{-1}$, (c) $\sqrt[3]{2i}$

Ejemplo 1.13

Determine un polinomio en $\mathbb{C}$ cuyas raíces sean los vértices de un hexágono regular que está centrado en el origen y que tiene uno de sus vértices en $(1, 0)$.

Ejercicios

Ejemplo 1.14

Obtenga las coordenadas de un hexágono regular sabiendo que está centrado en el origen y que uno de sus vértices está situado en $(1, 0)$.

Ejemplo 1.15

Obtenga las coordenadas de un hexágono regular centrado en el punto $(0, 1)$ que tiene uno de sus vértices en $(2, 1)$.

Ejercicio 1.13

Halle las soluciones de las ecuaciones siguientes: (a) $z^2 = i$, (b) $z^4 = -1$, (c) $z^3 = 1 + i$, (d) $z^5 = 1 + \sqrt{3}i$.

Ejercicios

Ejercicio 1.14

Obtenga un polinomio en $\mathbb{C}$ cuyas raíces sean los vértices de un pentágono regular que está centrado en el origen y que tiene uno de sus vértices en $(1, 0)$. Halle los otros dos vértices.

Ejercicio 1.15

Obtenga las coordenadas de un triángulo equilátero centrado en el punto $(1, 1)$ que tiene uno de sus vértices en $(1, 3)$.

Ejercicio 1.16

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Completando cuadrados, demuestre que las soluciones de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ son $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejercicios

Ejercicio 1.17

Halle las soluciones de la ecuación $z^2 - 4z + 8 = 0$.

Ejercicio 1.18

Demuestre que, para $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n \forall z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.19

Para $z \in \mathbb{C}$ se considera un polinomio $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ donde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Demuestre que $p(z_1) = 0$ si, y sólo si, $p(\bar{z}_1) = 0$