

**EJERCICIOS DE LAS LECCIONES 8, 9 y 10****8. SERIES DE FOURIER**

8.1 Halle la serie de Fourier de la función  $f(t) = |t|$  definida sobre  $[-\pi, \pi]$ .

(Solución:  $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)t)$ )

8.2 Una función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  está definida por  $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi}$  si  $t \in [0, 2\pi]$ . Obtenga su desarrollo en serie de Fourier. ¿A qué valor converge la serie en  $t = 5\pi$ ? ¿y en  $t = 6\pi$ ?

(Solución:  $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$ , converge a 0 en los dos puntos)

8.3 Obtenga el desarrollo en serie de Fourier en  $[-\pi, \pi]$  de la función periódica  $f(t)$  de periodo  $2\pi$  definida sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$  por  $f(t) = (\pi - t)^2$ . Estudie la convergencia para  $t = \pi$ . Utilice la serie de Fourier para probar que  $\frac{1}{12}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ . (Solución:  $f(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2}$ )

8.4 Se considera la función periódica de periodo 2 definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t < 1 \\ 3 & 1 < t < 2. \end{cases} \quad f(t+2m) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Calcule el desarrollo en serie de Fourier de  $f$  en  $[-1, 1]$  y especifique la convergencia de la serie.

(Solución:  $\frac{9}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\pi t)}{(2n-1)^2} - \frac{3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n}$ , converge a  $f(t)$  en cada punto, excepto en  $t = 2m$  con  $m \in \mathbb{Z}$  que converge a  $\frac{3}{2}$ )

8.5 Halle la forma compleja de la serie de Fourier de la función  $f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ , periódica de periodo  $4\pi$ .

(Solución:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)} e^{int}$ )

8.6 Calcule la serie de Fourier,  $S_f(t)$ , de la función:  $f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-2, -1[ \\ 0 & t \in [-1, 1[ \\ -1 & t \in [1, 2[ \end{cases}$ . Halle, de forma razonada, los valores de  $S_f(-1)$ ,  $S_f(3/2)$ ,  $S_f(2)$  y  $S_f(-14)$ .

8.7 Para  $k \in \mathbb{R}$ , se considera la función  $f_k(t) = \begin{cases} t & t \in ]1, 2] \\ k & t = 1 \\ 0 & t \in [0, 1[ \end{cases}$ . Razone que la serie de Fourier,

$S_{f_k}$ , asociada a  $f_k$  es convergente en toda la recta real. Para la función  $f_0$  calcule  $S_{f_0}(31)$  y  $S_{f_0}(-32)$ .

Para la función  $f_0$  calcule el coeficiente  $a_{42}$  de la serie en cosenos en  $(-2, 2)$ . Razone si existen valores de  $k$  para los cuales  $f_k(t)$  coincide con su serie en cosenos para todo  $t \in [0, 2]$ .

8.8 Para  $k \in (0, +\infty)$  se considera la función

$$f_k(t) = \begin{cases} t^2 & t \in (-k, k) \\ 1 & t = k \text{ ó } t = -k \\ -3 & t \in [-(k+1), -k) \cup (k, k+1] \end{cases}$$

Razone que la serie de Fourier,  $S_{f_k}$ , asociada a  $f_k$  es convergente en toda la recta real. Calcule, en caso de que sea posible, los valores de  $k$  tal que  $f_k(t) = S_{f_k}(t)$ , para todo  $t \in [-k-1, k+1]$ . Calcule para  $k = 1$  el valor de  $S_{f_1}(40)$  y el de  $S_{f_1}(-39)$ .

## 9. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

9.1 Sea  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ . Halle una solución del problema

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overset{\circ}{D}$$

con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(x, 1) = 2 \sin(\pi x) - 3 \sin(3\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1]$$

$$u(1, y) = 0, \quad y \in [0, 1]$$

9.2 Sea  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $f_0$  función suficientemente regular definida en  $[0, 1]$  y sea  $k > 0$ . Halle una solución del problema

$$u_{xx}(x, y) + ku_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overset{\circ}{D}$$

con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = f_0, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(x, 1) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$u(0, y) = 0, \quad y \in [0, 1]$$

$$u(1, y) = 0, \quad y \in [0, 1]$$

Expresa la solución en función de  $f_0$ .

## 10. TRANSFORMADA DE FOURIER

10.1 Halla la relación entre las transformadas de Fourier de  $e^{-x^2}$  y  $xe^{-x^2}$ .

10.2 Halla la relación entre las transformadas de Fourier de  $e^{-x^2}$  y  $x^2e^{-x^2}$ .

10.3 Halle la solución del problema

$$\begin{aligned}u_{tt}(x, t) - 2u_{xx}(x, t) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\u(x, 0) &= \sin(x), \quad x \in \mathbb{R} \\u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

10.4 Sea  $f(t)$  una función y sea  $\widehat{f}(s)$  su transformada de Fourier. Exprese la transformada de la función  $g(t) = e^{i\omega t}f(t)$  para  $\omega \in \mathbb{R}$  en función de la de  $f$ .

10.5 Halle la solución del problema  $u_t(x, t) - 2u_{xx}(x, t) = 0$ , si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in (0, \infty)$ ,  $u(x, 0) = e^{-3x^2}$  si  $x \in \mathbb{R}$